

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 16.07.2009)

Aufgabe 44

(10 Zusatzpunkte)

Wir betrachten Ereignisse (im Alltagsinn des Wortes), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle eines gegebenen Bereiches auftreten können, z.B. Gewitter in Deutschland innerhalb eines Monats (Ereignis: Gewitter, Bereich: Zeitintervall "ein Monat"), Regentropfen, die auf eine Fläche der Größe 1m^2 treffen (Ereignis: Auftreffen eines Regentropfens an der Stelle x , Bereich: die Fläche), Zerfälle von radioaktiven Atomen pro Jahr in 1kg Plutonium (Ereignis: Zerfall eines Atoms, Bereich: Zeitintervall "ein Jahr").

Die Zufallsvariable X zähle die Anzahl der Ereignisse pro Bereich (z.B. Gewitter pro Monat, Regentropfen pro m^2 , oder Zerfälle pro Jahr). Es sei bekannt, dass $E(X) = \lambda > 0$. Wie ist X verteilt?

Gehen Sie zur Beantwortung der Frage wie folgt vor. Unterteilen Sie den Bereich in n gleich große Teile ($n > \lambda$), nummeriert mit $i = 1, \dots, n$. In jedem Teil i finde mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ genau eines der Ereignisse statt (p gleich für alle i) und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ keines.

- Wie ist X nun verteilt?
- Wie müssen Sie p wählen, um $E(X) = \lambda$ zu erfüllen?
- Führen Sie nun den Limes $n \rightarrow \infty$ durch (warum?), und zeigen Sie dadurch, dass $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

HINWEIS: Es ist unterwegs sinnvoll, $b(k; n, \frac{\lambda}{n})$ wie folgt zu schreiben,

$$b(k; n, \frac{\lambda}{n}) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1) \lambda^k}{n^k k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

und dann den Limes $n \rightarrow \infty$, k fest, durchzuführen.

Aufgabe 45

(10 Zusatzpunkte)

- Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Bestimmen Sie $\text{Var}(X)$.
- Sei $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$. Bestimmen Sie $\text{Var}(Y)$.
- Die Zufallsvariable X_2 sei definiert wie in Aufgabe 43. Berechnen Sie $E(X_2)$ und $\text{Var}(X_2)$.

HINWEIS: Die Erwartungswerte Binomial- und Poisson-verteilter ZV haben wir in der Vorlesung berechnet, $E(X) = np$ und $E(Y) = \lambda$.

Aufgabe 46

(10 Zusatzpunkte)

Wir möchten die folgende Frage beantworten:

Wie oft muss man mit einem fairen Würfel würfeln, damit die relative Häufigkeit für das Ergebnis III mit 95%iger Wahrscheinlichkeit um weniger als 10% von $\frac{1}{6}$ abweicht?

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Sei X die Anzahl der III aus n Würfeln. Wie ist X verteilt? Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.
- Definieren Sie $Y := \frac{X}{n}$. Bestimmen Sie $E(Y)$ und $\text{Var}(Y)$.
- Wenden Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung für Y an, um eine Antwort auf die Ausgangsfrage zu erhalten.

Für große n besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass die Zufallsvariable Y näherungsweise normalverteilt ist, d.h. $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, mit den oben berechneten Werten für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 . Für normalverteilte Zufallsvariablen Z , d.h. $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gilt $P(|Z - \mu| < 2\sigma) \approx 95\%$. Verbessern Sie damit Ihr Ergebnis von oben.