

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 14.5.2009)

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär und gilt $U\vec{x} = \lambda\vec{x}$ für ein $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, so folgt: $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

und geben sie zugehörige Eigenvektoren an.

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $\overline{U}^T A U$ an.

Aufgabe 13 (10 Punkte)

Berechnen Sie e^{iAx} für $x \in \mathbb{R}$ und A aus Aufgabe 11.

HINWEIS: $\overline{U}^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von \vec{y} Funktionen von x , und \vec{y}' ist die komponentenweise Ableitung nach x , d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}' = \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{u} , so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes \vec{y} der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = (1 \ 0 \ -1)^T$, mit A aus Aufgabe 12.