Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 09

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe ausnahmsweise am **Mittwoch, 20.5.2009, vor 15:00,** durch Einwurf in die Box vor C6P43)

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und skizzieren Sie sie.

a) $6x^2 + 4xy + 9y^2 = 5$ b) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{5}xy - \frac{3}{5}y^2 = 1$

Aufgabe 16 (10 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.

b) Gegeben sei die quadratische Form ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x + z) + 2axz\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?

Aufgabe 17 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3 + y^6} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion $g : y \mapsto f(x_0, y)$ für beliebiges aber festes $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
b) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
c) Ist f in $\vec{0}$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 18 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \mathrm{e}^x - y^3 + xyz$.

a) Berechnen Sie ∇f. Ist f total differenzierbar?
b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (0, 1, \frac{\pi^2}{4})^T$ in Richtung von $\vec{v} = (-1, 0, \pi)^T$.
c) Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}(t))$ für die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Vergleichen Sie das Ergebnis an der Stelle $t = \frac{\pi}{2}$ mit dem Ergebnis aus Teil b.