Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 09

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe 28.5.2009)

Aufgabe 19 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$

a) für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Wege

$\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$ und

$\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an.

b) für

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x\,\mathrm{e}^{x^2} + y \\ x - z \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi]\,.$$

Aufgabe 20 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y) = \sin(x+y)$ und $g(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + \cosh(y) + \sin(xyz)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von

$$f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + xy + yz + 2x + 2z - 1$$

im Punkt $(-1, 1, 1)$. Hinweis: Sie müssen dazu nicht ableiten.

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2x^2 + 8y^2 - (x^4 + y^4)\,.$$

Geben Sie an, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

um auf ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix A, so daß $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Bemerkung: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?