Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 09

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe ausnahmsweise am **Mittwoch, 10.6.2009, vor 15:00,** durch Einwurf in die Box vor C6P43)

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Für welche $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ ist das folgende Gleichungssystem nicht nach (y, z) auflösbar?

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ y - z &= -2 \end{aligned}$$

Sei f die Auflösung nach (y, z) in einer Umgebung von $(0, 0, 2)$. Berechnen Sie $f'(0)$.

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Wir betrachten die Gleichung $y^3 + y - x^3 + x = 0$.

a) Zeigen Sie: Die Gleichung ist überall lokal nach y auflösbar, definiert dort also eine Funktion $y = f(x)$.

b) Berechnen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion f aus Teil a.
Hinweis: Suchen Sie zunächst alle x, für die $f'(x) = 0$ gilt. (f' erhalten Sie durch implizites Ableiten.) Untersuchen Sie dann das Vorzeichen von f'' an diesen Stellen (f'' erhalten Sie durch nochmaliges implizites Ableiten.)

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Für welche $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ ist die Funktion

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[1] Berechnen Sie auch $f^{-1\prime}(1, 1)$.

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Wenn Sie $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können Sie auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.
Man definiert für $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation)}$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x\,\mathrm{e}^{x^2} + y \\ x - z \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

---

[1]Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix}$.