

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 25.06.2009)

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen einer Kugelschale mit Innenradius R und Dicke d , d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K dV$ für

$$K := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R \leq |\vec{x}| \leq R + d \} .$$

Bestimmen Sie auch $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{|K|}{d}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 33 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

- a) Berechnen Sie das Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} .$$

- b) Bestimmen Sie das Volumen, das vom Graph der Funktion

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

und der xy -Ebene eingeschlossen wird.

Aufgabe 34 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Fläche der Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

Aufgabe 35 (Elliptische Koordinaten) (10 Punkte)

Sei $\vec{x} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{x}(\eta, \phi) = \begin{pmatrix} \cosh \eta \cos \phi \\ \sinh \eta \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y : \text{kartesisch}) .$$

- a) Zeigen Sie, dass \vec{x} für alle (η, ϕ) mit $\eta \neq 0$ lokal invertierbar ist – dadurch also krummlinige Koordinaten definiert werden.
b) Sind diese Koordinaten orthogonal? Wie lautet das Flächenelement $dV = dx dy$ in diesen Koordinaten?
c) Was für eine Kurve wird durch $\eta = C$ mit festem $C > 0$ beschrieben?
d) Sei $\tilde{K} := \{(\eta, \phi) \mid 0 \leq \eta \leq C\}$, $C > 0$ fest, und $K = \vec{x}(\tilde{K})$. Berechnen Sie die Fläche $|K|$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabe 34.

HINWEIS: $\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi = \pi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi$.