

## Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 2.7.2009)

---

### Aufgabe 36

(10 Punkte)

Sei  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch  $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , und sei  $K$  die Kugel mit Radius  $R$ .

- Bestimmen Sie  $\int_{\partial K} \vec{f} \vec{n}_i \, dO$  (ohne Verwendung eines Integralsatzes).
- Berechnen Sie  $\operatorname{div} \vec{f}$ .
- Bestimmen Sie  $\int_K \operatorname{div} \vec{f} \, dV$  für  $\alpha > 3$ .
- Bilden Sie den Limes  $\alpha \rightarrow 3$  Ihres Ergebnisses aus c und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus a & b für  $\alpha = 3$ . Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

### Aufgabe 37

(10 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2, z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von  $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$  durch  $S$ .

HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten,  $dx \, dy = r \, dr \, d\varphi$ , sind hilfreich.

### Aufgabe 38

(10 Punkte)

Berechnen Sie  $\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v} \, d\vec{x}$  für

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + e^{-x^2} \\ \sin y - x \\ \cosh z \end{pmatrix};$$

dabei sei  $\mathfrak{K}$  der im Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis in der  $xy$ -Ebene.

### Aufgabe 39

(10 Punkte)

Sei  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Ergänzen Sie die folgenden Mengen von Teilmengen von  $\Omega$  jeweils zur kleinstmöglichen Algebra  $\mathcal{A}$  über  $\Omega$ .

- $\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$
- $\{\emptyset, \{1, 5\}\}$
- $\{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid |A| = 3\}$
- $\{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid |A| = 5\}$