Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 09

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 21.7.2009

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 108 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)
Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

a) für $m = n = 1$ und
b) für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x-1}{x^3+2x^2+x}$.
b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x-1}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{y'y}{\cos x} - \frac{y'}{\cos x} - \frac{1}{2} = 0\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

Aufgabe 4 (4+2+4 Punkte)

a) Geben Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 4y' + 4y = 0$ an.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
c) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y' + 4y = \cos x$, $y(0) = \frac{3}{25}$, $y'(0) = \frac{4}{25}$.

Aufgabe 5 (5+3+4 Punkte)
Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren.
b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass gilt $U^T A U = D$.
c) Berechnen Sie A^{2009}.

Aufgabe 6 (6+6+10 Punkte)
Die Kurve

$$\mathfrak{K}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\,\cos t \\ r(t)\,\sin t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad r(t) = 1 + \cos t\,, \quad t \in [0, 2\pi),$$

heißt Kardioide.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kardioide mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie die Kardioide.
b) Berechnen Sie den Inhalt der von der Kardioide eingeschlossenen Fläche.
c) Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}_j \, d\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f}_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{f}_2(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima, sowie alle Sattelpunkte von

$$f(x, y) = x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} - xy$$

d.h. geben Sie jeweils die kritische Stelle, den Funktionswert an der kritischen Stelle und die Art des kritischen Punkts (Minimum, Maximum oder Sattel) an.

Aufgabe 8 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0, 1]^3$ mit Dichte $f(x, y, z) = y^2 z\, e^{xyz}$, d.h. berechnen Sie $m := \int_W f \, dV$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)
Berechnen Sie die Oberfläche $O(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} dO$ des Torus'

$$\mathcal{T} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} (2 + \sin u) \cos v \\ (2 + \sin u) \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}\,,\; 0 \le u < 2\pi\,,\; 0 \le v < 2\pi \right\}.$$

Aufgabe 10 (6 Punkte)
Geben Sie drei verschiedene σ-Algebren über $\Omega = \{1, 2, 3\}$ an.

Aufgabe 11 (4+4 Punkte)
Im einem Kino wird ein Film gezeigt, der ab 18 Jahren freigegeben ist. Bei 10% der Besucher wird das Alter kontrolliert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein kontrollierter Besucher unter 18 ist, beträgt 80%. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht kontrollierter Besucher unter 18 ist, beträgt 40%. Wir definieren die Ereignisse

$$U := \text{“Besucher ist unter 18”} \qquad \text{und} \qquad K := \text{“Besucher wird kontrolliert”}\,.$$

a) Geben Sie $P(U|K)$, $P(U^C|K)$, $P(U|K^C)$ und $P(K)$ an.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besucher, der unter 18 Jahre alt ist, kontrolliert wird.