Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
21.06.2010
Blatt 10

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

1. Sei $\mathcal{C}_1 = \underline{\mathbf{SK}}$ die Kategorie der simplizialen Komplexe, $\mathcal{C}_2 = \underline{\mathbf{Ab}}$ die Kategorie der abelschen Gruppen und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die Funktoren $F_1, F_2 \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, die auf den Objekten gegeben sind durch

   $F_1(K) := H_k(K)$ (simpliziale Homologie), $F_2(K) := H_K(C(|K|))$ (zelluläre Homologie).

   Zeigen Sie, dass der Isomorphismus $C_*(K) \colon H_k(K) \to H_k(C(|K|))$ aus der Vorlesung $C_* = (C_*(K))$ zu einer natürlichen Transformation von F_1 nach F_2 macht.

2. Sei (H, ∂) eine Homologie-Theorie auf den Raumpaaren und sei (X, A, B) ein Raumtripel. Zeigen Sie, dass die induzierte lange Tripel–Sequenz exakt ist.

3. Sei (H, ∂) eine Homologie-Theorie auf $\underline{\mathbf{Top_2}}$, X ein topologischer Raum und seien $A_1, A_2 \subseteq X$ Teilräume mit $A_1 \cup A_2 = X$. Zeigen Sie:

   (a) Induziert die Ausschneidungsinklusion $(A_1, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X, A_2)$ einen Isomorphismus in der Homologie, so auch die Ausschneidungsinklusion $(A_2, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X, A_1)$.

   (b) Unter den Voraussetzungen von (a) liefern die Inklusionen $i_s \colon (A_s, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X, A_1 \cap A_2)$ $(s = 1, 2)$ einen Isomorphismus

   $$H(A_1, A_1 \cap A_2) \oplus H(A_2, A_1 \cap A_2) \longrightarrow H(X, A_1 \cap A_2)$$

   vermöge $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (i_1)_*(\alpha_1) + (i_2)_*(\alpha_2)$.

   (c) Seien nun $j_s \colon A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A_s$, $i_s \colon A_s \hookrightarrow X$ $(s = 1, 2)$ und $\iota \colon X \hookrightarrow (X, A_1 \cap A_2)$ die Inklusionen sowie

   $$\begin{aligned} \varphi_k(\alpha) &= ((j_1)_*(\alpha), -(j_2)_*(\alpha)), \\ \psi_k(\alpha_1, \alpha_2) &= (i_1)_*(\alpha_1) + (i_2)_*(\alpha_2), \\ \Delta_k &= \partial_k(X, A_1 \cap A_2) \circ \iota_*. \end{aligned}$$

   Dann ist die folgende *Mayer–Vietoris–Sequenz* exakt:

   $$\ldots \longrightarrow H_k(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\varphi_k} H_k(A_1) \oplus H_k(A_2) \xrightarrow{\psi_k} H_k(X) \xrightarrow{\Delta_k} H_{k-1}(A_1 \cap A_2) \longrightarrow \ldots$$

Abgabe: Montag, 28. Juni 2010, 9 Uhr