Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
28.06.2010
Blatt 11

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

1. Seien A und B abelsche Gruppen.

   (a) Zeigen Sie, dass es für zwei Tensorprodukte (T_1, t_1) und (T_2, t_2) von A und B genau einen Isomorphismus $\Phi\colon T_1 \to T_2$ gibt mit $\Phi \circ t_1 = t_2$.

   (b) Sei C eine abelsche Gruppe und $(A \otimes B, \otimes)$ Tensorprodukt von A und B. Zeigen Sie, dass die Zuordnung
   $$\Phi\colon \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Bil}(A \times B, C), \quad f \mapsto f \circ \otimes$$
   ein Isomorphismus von Gruppen ist.

2. Seien A und B abelsche Gruppen und $A \otimes B$ ihr Tensorprodukt.

   (a) Zeigen Sie für alle $a \in A$, $b \in B$ und $n \in \mathbb{Z}$:
   $$a \otimes (nb) = (na) \otimes b = n(a \otimes b).$$

   (b) Ein Element $t \in A \otimes B$ heißt *zerlegbar*, wenn es im Bild von $\otimes\colon A \times B \to A \otimes B$ liegt. Zeigen Sie am Beispiel von $A = B = \mathbb{Z}^2$ und $t = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ (wo (e_1, e_2) die kanonische Basis von $\mathbb{Z}^2$ sei), dass i.A. nicht jedes Element zerlegbar ist.

3. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

   (a) $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^{mn}$

   (b) $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{ggt}(m,n)}$.

4. Gegeben sei eine Homologie–Theorie (H, ∂) auf $\underline{\mathbf{Top_2}}$ mit kompakten Trägern, d.h.: für jedes Raumpaar (X, A) und jedem $\alpha \in H_k(X, A)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ existiert ein kompaktes Paar $(K, L) \subseteq (X, A)$, so dass α im Bild von $H_k(K, L) \to H_k(X, A)$ liegt.
   Sei nun X ein topologischer Raum und $X^k \subseteq X$ für $k \in \mathbb{N}_0$ derart, dass gilt:

   (i) $X^k \subseteq X^{k+1}$ für alle k und $X = \bigcup_k X^k$;

   (ii) für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq X^n$;

   (iii) $H_l(X^k, X^{k-1}) = 0$ für $l \neq k$.

   Definieren Sie dann einen Kettenkomplex $C = (C_k, \partial_k)$ durch $C_k := H_k(X^k, X^{k-1})$ und ∂_k dem verbindenden Homomoprhismus in der Tripelsequenz von (X^k, X^{k-1}, X^{k-2}) und zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$:
   $$H_k(C) \cong H_k(X).$$

Abgabe: Montag, 5. Juli 2010, 9 Uhr