Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
12.07.2010
Blatt 12

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

1. Zeigen Sie:

   (a) Sind A und B endlich erzeugte abelsche Gruppen, so gilt:

   $$\mathrm{Tor}(A,B) \cong \mathrm{Tor}(\mathrm{Tor}A, \mathrm{Tor}B).$$

   (b) Für alle $m,n \in \mathbb{N}$ gilt:

   $$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(m,n)}.$$

2. Zeigen Sie: Ist C ein freier Kettenkomplex und $k \in \mathbb{Z}$, so gilt:

   (a) Ist $H_k(C)$ endlich erzeugt und $H_k(C, \mathbb{Z}_p) = 0$, für alle Primzahlen p, so ist $H_k(C) = 0$;

   (b) ist $H_{k-1}(C)$ frei abelsch, so ist $\lambda\colon H_k(C) \otimes G \to H_k(C;G)$ ein Isomorphismus für alle abelsche Gruppen G;

   (c) ist $H_{k-1}(C)$ endlich erzeugt, so ist $\lambda\colon H_k(C) \otimes \mathbb{R} \to H_k(C;\mathbb{R})$ ein Isomorphismus.

3. Zeigen Sie, dass die Homomorphismen λ und μ aus dem universellen Koeffiziententheorem natürliche Transformationen von $F_1 := H_k(\cdot) \otimes G$ nach $F_2 = H_k(\,\cdot\,;G)$ bzw. $G_1 = F_1$ nach $G_2 = \mathrm{Tor}(H_{k-1}(\cdot), G)$ sind.

4. Berechnen Sie die Homologie des reell–projektiven Raumes $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$ mit Hilfe des Satzes über universelle Koeffizienten.

Abgabe: keine!