Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
19.04.2010
Blatt 2

Übungen zu „Algebraische Topologie II"

1. Zeigen Sie: Ist X ein topologischer Raum und $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ abgeschlossen mit $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, so gilt:
   (a) $Z \subseteq X$ abgeschlossen, genau wenn $Z \cap A_i$ abgeschlossen in A_i ist für $i = 1, \ldots, n$.
   (b) Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ (Y ein topologischer Raum) ist genau dann stetig, wenn $f|A_i \colon A_i \to Y$ es ist ($i = 1, \ldots, n$).

2. Sei G eine abelsche Gruppe und $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen. Zeigen Sie folgenden Noetherschen Isomorphiesatz:
$$H_1/H_1 \cap H_2 \cong (H_1 + H_2)/H_2.$$

3. Sei $n \geq 2$ und $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Für $X_l^n := \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_l\}$ gilt dann offensichtlich $X_{l'}^n \subseteq X_l^n$ falls $l \leq l'$. Zeigen Sie für $l < l'$:
$$H_k(X_l^n, X_{l'}^n) \cong \begin{cases} H_{k-1}(X_{l'-l}^n) & k > 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

4. (a) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und zueinander homöomorph. Zeigen Sie: $n = m$. (Hinweis: Ist $f \colon U \to V$ ein Homöomorphismus, $p \in U$ und $q := f(p)$, so betrachte den Homöomorphismus $f \colon (U, U \setminus \{p\}) \to (V, V \setminus \{q\})$.)
   (b) Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeigen Sie: Ist $U \subseteq X$ offen, V offen in $\mathbb{R}^m$ und $f \colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$, ein Homöomorphismus, so gilt $n = m$.

Abgabe: Montag, 26. April 2010, 9 Uhr