Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
26.04.2010
Blatt 3

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Standard–Simplex der Dimension n. Zeigen Sie:
$$(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong (B^n, S^{n-1}).$$

2. Sei (E, K) ein 2–dimensionaler simplizialer Komplex. Wir definieren $e := \#E$, $k := \#\{s \in K : \dim s = 1\}$, $f := \#\{s \in K : \dim s = 2\}$ und die *Euler–Charakteristik von* K durch
$$\chi(K) := e - k + f.$$
   (a) Geben Sie eine Triangulierung K_M des Möbiusbandes M, K_F der Kleinschen Flasche F und K_{P_2} für den 2–dimensionalen projektiven Raum T_2, an.
   (b) Rechnen Sie nach, dass $\chi(K_M) = \chi(K_F) = 0$ und $\chi(K_{P_2}) = 1$ ist.

3. Seien K, L simpliziale Komplexe. Sind $\varphi, \varphi' \colon K \to L$ simpliziale Abbildungen, so heissen φ und φ' *benachbart*, falls $\varphi(s) \cup \varphi'(s) \in L$ für alle $s \in K$ gilt. Wir definieren $\varphi \sim \varphi'$, falls es simpliziale Abbildungen $\varphi_0, \dots, \varphi_n \colon K \to L$ gibt, so dass $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_n = \varphi'$ und φ_{i-1}, φ_i benachbart sind für $i = 1, \dots n$. Offensichtlich ist dies eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der simplizialen Abbildungen von K nach L und wir bezeichnen mit $[K; L]$ die Menge der Äquivalenzklassen (mit der von oben definierten Relation) von simplizialen Abbildungen.
   (a) Sei M ein weiterer simplizialer Komplex. Zeigen Sie: Für $[\varphi] \in [K; L]$ und $[\psi] \in [L; M]$ ist die Komposition $[\varphi] \circ [\psi] := [\varphi \circ \psi]$ wohldefiniert. Definieren Sie dadurch eine Kategorie, deren Morphismenmenge durch $[K, L]$ gegeben ist, so dass $[\cdot]$ ein Funktor von **SK** in diese Kategorie wird.
   (b) Zeigen Sie: Sind $\varphi, \varphi' \colon K \to L$ benachbart, so ist $|\varphi|$ homotop zu $|\varphi'|$.

4. Beweisen Sie erneut, dieses Mal ohne die Kenntnis der Homologie von S^n $(n \in \mathbb{N}_0)$, dass
$$H_k(B^n, S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
ist. (Hinweis: Sei $B_+^{n-1} \subseteq S^{n-1}$ die (abgeschlossene) obere Hemisphäre. Betrachten Sie das Raumtripel $(B^n, S^{n-1}, B_+^{n-1})$.)

Abgabe: Montag, 3. Mai 2010, 9 Uhr