Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
03.05.2010
Blatt 4

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Wir führen auf diesem Blatt die *Schleifenkantenwegegruppe* eines simplizialen Komplexes (E, K) ein, als Analogon zur Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Eine *Kante* von K ist ein geordnetes Paar $k = (e, e')$, sodass $\{e, e'\} \in K$ ist und wir setzen $k^- := e$ und $k^+ := e'$. Ein *Kantenpfad* κ ist eine endliche Folge $k_1 k_2 \dots k_n$ von Kanten, so dass $k_i^+ = k_{i+1}^-$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ gilt. Weiter sei $\kappa^- := k_0^-$ der Anfang und $\kappa^+ := k_n^+$ das Ende des Pfades κ. Das Produkt von zwei Pfaden κ_1 und κ_2 mit $\kappa_1^+ = \kappa_2^-$ ist die Folge bestehend aus der Folge von κ_1 gefolgt von der Folge κ_2. Es heißen κ_1 und κ_2 *einfach äquivalent*, falls es Ecken $e, e', e'' \in E$ gibt mit $\{e, e', e''\} \in K$ und wenn es Pfade κ', κ'' gibt mit $\kappa'^- = e$ sowie $\kappa''^+ = e''$, sodass $\{\kappa_1, \kappa_2\}$ zu einer dieser Mengen gleich ist:

$$\{(e, e''), (e, e')(e', e'')\},\ \{\kappa'(e, e''), \kappa'(e, e')(e', e'')\},$$
$$\{(e, e'')\kappa'', (e, e')(e', e'')\kappa''\},\ \{\kappa'(e, e'')\kappa'', \kappa'(e, e')(e', e'')\kappa''\}.$$

Schließlich sollen zwei Pfade κ und κ' *äquivalent* zueinander sein, $\kappa \sim \kappa'$, falls es Pfade $\kappa_0, \dots, \kappa_n$ gibt mit $\kappa_0 = \kappa$, $\kappa_n = \kappa'$, so dass κ_i einfach äquivalent zu κ_{i+1} für $i = 0, \dots, n-1$ ist.

1. Zeigen Sie, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kantenpfade gegeben ist.

2. Sei nun $e_0 \in E$ und $\pi(K, e_0) := \{\kappa : \kappa \text{ ist ein Kantenpfad}, \kappa^- = \kappa^+ = e_0\}/\sim$. Zeigen Sie, dass $[\kappa][\kappa'] := [\kappa\kappa']$ wohldefiniert ist und dadurch eine Verknüpfung auf $\pi(K, e_0)$ definiert wird, so dass $\pi(K, e_0)$ zu einer Gruppe wird.

3. (a) Seien $E := \{e_1, e_0, e_3\}$ und $K := \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\}$. Zeigen Sie, dass K einfach zusammenhängend ist, also $\pi(K, e_1)$ trivial ist.
   (b) Seien $E := \{e_1, e_0, e_3\}$ und $K := \mathcal{P} \setminus \{\emptyset, E\}$. Zeigen Sie, dass $\pi(K, e_1) \cong \mathbb{Z}$ ist.

4. Sei K ein simplizialer Komplex, $\kappa = k_1 \dots k_n$ ein Kantenpfad in K und
$$I_n := \left\{ \left\{\frac{i}{n}\right\} : 0 \leq i \leq n \right\} \cup \left\{ \left\{\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right\} : 1 \leq i \leq n \right\}$$
eine Triangulierung des Intervals $I := [0, 1]$. Wir definieren $\varphi_\kappa \colon I_n \to K$ durch folgende Eckenabbildung:
$$(\varphi_\kappa)_0 \left(\frac{i}{n}\right) := \begin{cases} k_{i+1}^- & 0 \leq i \leq n-1 \\ k_i^+ & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$
Zeigen Sie: Sind κ_1, κ_2 zwei Kantenpfade und $\kappa_1 \sim \kappa_2$, dann ist $|\varphi_{\kappa_1}| \simeq |\varphi_{\kappa_2}|$ relativ $\{0, 1\} \subset I$. Zeigen Sie weiter, dass $\kappa_1 \sim \kappa_2$ ist, falls φ_{κ_1} benachbart zu φ_{κ_2} ist.

Abgabe: Montag, 10. Mai 2010, 9 Uhr