Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
01.06.2010
Blatt 7

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

1. Seien X und Y topologische Räume, $B \subseteq Y$ abgeschlossen, $f\colon B \to X$ stetig und $\pi\colon X + Y \to X \cup_f Y$ die kanonische Projektion. Sind $i_X\colon X \to X + Y$ und $i_Y\colon Y \to X + Y$ die kanonischen Inklusionen, so zeigen Sie:

   (a) $j := \pi \circ i_X\colon X \to X \cup_f Y$ ist eine Einbettung und $j(X) \subseteq X \cup_f Y$ ist abgeschlossen;

   (b) $g := \pi \circ i_Y | Y \setminus B\colon Y \setminus B \to X \cup_f Y$ ist eine Einbettung und es gilt:
   $$X \cup_f Y = j(X) \,\dot\cup\, g(Y \setminus B).$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}^n$ der reell–projektive Raum der Dimension n, $H \subseteq \mathbb{P}^n$ seine ∞–ferne Hyperebene und $i\colon \mathbb{P}^{n-1} \cong H \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ seine Inklusion. Sei weiter $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ die kanonische Projektion und $X := \mathbb{P}^{n-1} \cup_f B^n = \mathbb{P}^{n-1} \cup e^n$. Zeigen Sie, dass dann durch $\Phi|\mathbb{P}^{n-1} = i$ und
   $$(\Phi|e^n)(x_1, \dots, x_n) = [1 - |x| : x_1 : \dots : x_n]$$
   ein Homöomorphismus $\Phi\colon X \to \mathbb{P}^n$ gegeben wird.

3. Sei $X = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der 2–dimensionale Torus, $X^k = T^2$ für $k \geq 2$ und
   $$X^1 = \{[x_1, x_2] \in X : x_1 \equiv 0 \text{ oder } x_2 \equiv 0 \mod \mathbb{Z}^2\}$$
   sowie
   $$X^0 = \{[0,0]\}.$$
   Zeigen Sie, dass $(X^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine CW–Struktur auf T^2 ist.

4. Sei K ein simplizialer Komplex und e_0 eine Ecke von K. Wir definieren einen Homomorphismus ρ zwischen der Schleifenkantenwegegruppe $\pi(K, e_0)$ und der Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|, e_0)$ durch
   $$\rho(\kappa) = |\varphi_\kappa|$$
   (vgl. Blatt 4). Zeigen Sie:

   (a) ρ ist surjektiv. (Hinweis: Simpliziale Approximation)

   (b) ρ ist injektiv. (Hinweis: Sind K und L simpliziale Komplexe, $f, f'\colon |K| \to |L|$ homotop zueinander, so benutzen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und simpliziale Approximation $\varphi, \varphi'\colon \mathrm{sd}^n K \to L$ von f bzw. f' gibt, die in der gleichen Nachbarschaftsklasse liegen, $\varphi \sim \varphi'$.)

Abgabe: Montag, 7. Juni 2010, 9 Uhr