Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2010
08.06.2010
Blatt 8

# Übungen zu „Algebraische Topologie II“

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Standard-Simplex der Dimension $n$.
   (a) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $\delta^0_{n-1}\colon \Delta_{n-1} \to \dot{\Delta}_n$ der übliche Homöomorphismus auf die nullte Seite von $\Delta_n$ und $A_n \subseteq \dot{\Delta}_n$ die Vereinigung der anderen Seiten. Zeigen Sie, dass $\delta^0_{n-1}\colon (\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \to (\dot{\Delta}_n, A_n)$ einen Isomorphismus in der Homologie induziert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Delta_{n-1}/\dot{\Delta}_{n-1} \cong \dot{\Delta}_n/A_n$ ist.)
   (b) Sei nun $\partial_*\colon H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \to H_{n-1}(\dot{\Delta}_n, A_n)$ der verbindende Homomorphismus in der Homologiesequenz des Tripels $(\Delta_n, \dot{\Delta}_n, A_n)$. Zeigen Sie, dass $\partial_*$ ein Isomorphismus ist und die Komposition
   $$\partial_*^{-1} \circ (\delta^0_{n-1})_*\colon H_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \to H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$$
   die Homologieklasse $[\mathrm{id}_{n-1}]$ in die Homologieklasse $[\mathrm{id}_n]$ überführt.
   (c) Zeigen Sie damit schließlich, dass das Element $[\mathrm{id}_n]$ die Homologiegruppe $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt.

2. Sei $g \geq 2$ und $E_{2g} \subseteq \mathbb{R}^2$ das reguläre $2g$-Eck mit Ecken $z_1, \ldots, z_{2g}$. Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $E_{2g}$, die von
   $$(1-t)z_{2j-1} + tz_{2j} \sim (1-t)z_{2j} + tz_{2j+1}$$
   (für $t \in [0,1]$ und $j = 1, \ldots, g$) erzeugt wird. Wir nennen dann $N_g := E_{2g}/\sim$ die *nicht–orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht* $g$ (und setzen $N_1 := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$). Definieren Sie nun eine geeignete CW–Struktur auf $N_g$ und zeigen Sie für die zugehörige zelluläre Homologie:
   $$H_0(C(N_g)) \cong \mathbb{Z},\ H_1(C(N_g)) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2,\ H_k(C(N_g)) = 0 \text{ sonst.}$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $S^0 \subseteq S^1 \subseteq \cdots \subseteq S^n$ jeweils als Äquator eingebettet. Wir betrachten auf $S^k$ $(k = 0, \ldots, n)$ jeweils die obere bzw. die untere Hemisphäre $e^k_\pm = \{x \in S^k : \pm x_{k+1} > 0\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F^k_\pm\colon B^k \to S^k$
   $$F^k_\pm(x) = (x, \pm\sqrt{1-|x|^2})$$
   für die Zellen $e^k_\pm$ charakteristisch sind und $(e^k_\pm)_{k=0,\ldots,n}$ zu einer CW–Struktur auf $S^n$ machen.
   (b) Wir orientieren nun $e^k_\pm$ mit $F^k_\pm$ (und der Standardorientierung $[B^k]$ von $(B^k, S^{k-1})$). Sei $d\colon S^n \to S^n$ die Antipodenabbildung. Zeigen Sie:
   $$d_* e^k_+ = (-1)^k e^k_-, \quad \partial e^{k+1}_+ = \partial e^{k+1}_- = \pm(e^k_+ - e^k_-).$$
   (c) Auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/d$ mit kanonischer Projektion $\pi$ betrachten wir nun die Zellenzerlegung $(e^k)_{k=0,\ldots,n}$ gegeben durch $e^k = \pi(e^k_+) = \pi(e^k_-)$.

(mit $e_\pm^k$ aus (a)) und orientieren diese mit $\pi \circ F_+^k$. Zeigen Sie nun für den zellulären Randoperator $\partial$ der CW–Struktur $(e^k)$:

$$\partial e^k = \pm(1 - (-1)^{k-1})e^{k-1} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

**Abgabe: Montag, 14. Juni 2010, 9 Uhr**