Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 10

Mathematik II für Biologen

Zusatzblatt (Abgabe optional am 9.7.2010)

Aufgabe 41 (Abi 1985, Ba-Wü) (10 Zusatzpunkte)

a) Fünf ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse,
A: Die Würfel zeigen die gleiche Augenzahl,
B: Alle Würfel zeigen verschiedene Augenzahlen,
C: Die Wüfel zeigen entweder die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 2, 3, 4, 5, 6.

b) Ein idealer Würfel wird 10mal geworfen. X beschreibe die Anzahl der dabei auftretenden Sechsen. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$. Ermitteln Sie diejenigen Werte von X, welche im Intervall $[E[X] - 3\sigma(X), E[X] + 3\sigma(X)]$ liegen. ($\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$)
Der Würfel wird $n$mal geworfen. Y beschreibe die Anzahl der dabei auftretenden Sechsen. Wie groß muß n mindestens sein, damit das Intervall $[E[X]-3\sigma(X), E[X]+3\sigma(X)]$ im Intervall $[0, n]$ enthalten ist?

c) Um zu untersuchen, ob bei einem gegebenen Würfel die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftritt, wird dieser 300mal geworfen und die Anzahl der Sechsen gezählt.
   (i) Wie lauten die Hypothesen?
   (ii) Welche Zufallsvariable wird bei diesem Test betrachtet?
   (iii) Wie ist diese Zufallsvariable bei zutreffender Nullhypothese verteilt?
   (iv) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für das Signifikanzniveau 5%. (Sie dürfen dazu die Verteilung der Teststatistik durch eine Normalverteilung annäheren.)
   (v) Wie wird aufgrund einer Stichprobe vom Umfang 300 entschieden, wenn 60 Sechsen auftreten?
   (vi) Welcher Fehler kann dabei begangen werden?
   (vii) Wie groß ist dieser Fahler, wenn die Wahrscheinlichkeit für Sechs 0,2 beträgt?

d) Ein idealer Würfel wird 450mal geworfen. Dabei beschreibe die Zufallsvariable Z die relative Häufigkeit der Augenzahl 6.
Berechnen Sie näherungsweise den zu $E[Z]$ symmetrischen Bereich, in den die relative Häufigkeit der Augenzahl 6 mit 95%iger Wahrscheinlichkeit fällt.
Wie oft muss man werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,90 die relative Häufigkeit der Augenzahl 6 um höchstens 0,05 von $\frac{1}{6}$ abweicht?

Aufgabe 42 (Vergleich der Macht zweier Tests) (10 Zusatzpunkte)

Oft gibt es mehrere Tests, die man auf dieselben Daten zum selben Signifikanz-Niveau α anwenden kann. Während α die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art bestimmt und damit für alle Tests gleich ist, können die Wahrscheinlichkeiten β für einen Fehler zweiter Art für die verschiedenen Tests sehr verschieden sein. Es ist für Anwendungen wichtig, den Test zu nehmen, der (für die in Frage kommenden Alternativen) das kleinste β und damit die größte Macht $1-\beta$ hat.

Beispiel: Gegeben sei ein Würfel, bei dem alle Zahlen gleich wahrscheinlich sind, nur die Zahl 6 kommt im Durschnitt nur 80% so häufig vor, wie sie dies für einen fairen Würfel sollte. (Somit erscheint mit Wahrscheinlichkeit $P[W{=}6] = 0{,}8/6$ eine 6 und mit Wahrscheinlichkeit jeweils $P[W{=}i] = (1-0{,}8/6)/5$ eine der anderen fünf Zahlen $i = 1, 2, 3, 4, 5$.) Im folgenden werden ein χ^2-Test und ein Vorzeichentest hinsichtlich ihrer Fähigkeit verglichen, zwischen einem ungezinkten und einem in dieser speziellen Weise gezinkten Würfel zu unterscheiden.

a) Ungefähr mit welcher Wahrscheinlichkeit (=Macht=$1-\beta$) findet ein χ^2-Test zu $\alpha = 5\%$ heraus, dass dieser Würfel nicht fair ist, wenn der Würfel 900 Mal geworfen wird? Matlab-Code dazu

```
n=10000; verworfen=zeros(1,n); % n kleiner waehlen, falls Rechner zu langsam
krit=5+2*sqrt(2*5); % kritische Grenze fuer alpha=5% und 6-1 Freiheitsgrade,
                    % vgl.Aufg.17
anzahl=zeros(1,6);
for k=1:n
    simwuerfe=ceil(5.8*rand(900,1)); % simuliert 900 Würfe des unfairen Würfels
    for i=1:6
        anzahl(i)=sum(simwuerfe==i);
    end
    T=sum((anzahl-[150 150 150 150 150 150]).^2)/150;
    verworfen(k)=T>krit; % Notiert 1, falls T>krit und 0 sonst.
end
Macht=??? % Anteil der Tests, die verwerfen konnten
```

b) Ungefähr mit welcher Wahrscheinlichkeit findet ein Vorzeichentest heraus, dass dieser Würfel nicht fair ist, wenn der Würfel 900 Mal geworfen wird? Der Vorzeichentest verwende als Teststatistik T die Anzahl Würfe, die eine Zahl $< 3{,}5$ ergeben. Wenn der Würfel fair ist, sollte im Durchschnitt die Hälfte der Würfe, d.h. $900/2 = 450$ Würfe, eine Zahl $< 3{,}5$ ergeben. Gemäß Faustregel aus der Vorlesung verwirft dieser Test zu $\alpha = 5\%$, falls die tatsächlich beobachtete Zahl T um mindestens $\sqrt{900} = 30$ nach oben oder unten von der erwarteten Zahl 450 abweicht. Ersetzen Sie dazu im obigen Matlab-Code die entsprechenden Zeilen durch `T=sum(simwuerfe<3.5);` und `verworfen(k)=abs(T-450)>=30;`.

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus a) und b). Welcher Test scheint mächtiger zu sein?

d) Wie müsste man obige Programme abändern, um zu überprüfen, ob die jeweiligen Verwerfungskriterien tatsächlich zu $\alpha = 5\%$ passen?