Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Biologen

Nachklausur am 05.10.2010

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe (nicht Teilaufgabe) auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 81 Punkte erreichbar, 66 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 33 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Hilfsmittel: Zwei beidseitig handbeschriebene A4-Blätter, nicht internetfähiger Taschenrechner.
Bearbeitungszeit: 105 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+3+1+4+1+4 = 15 Punkte)

Die Landwirte Johannes und Sebastian melken morgens und abends im Abstand von 12 Stunden 11 Braunviehkühe. Ab und zu messen sie für jede Kuh den Milchertrag in kg. An einem Tag ergaben sich die folgenden Werte:

Kuh	Anja	Helga	Gemsli	Rita	Orchidee	Olgi	Belinda	Fiona	Nadia	Julia	Lama
morgens (M)	11,6	6,8	10,8	9,6	13,0	9,2	7,0	12,2	10,2	8,2	8,0
abends (A)	11,4	6,4	10,5	9,7	13,6	10,0	7,7	13,2	10,5	8,7	8,9
Differenz $M - A$	0,2	0,4	0,3	-0,1	-0,6	-0,8	-0,7	-1,0	-0,3	-0,5	-0,9

Sebastian vermutet, dass seine Kühe abends mehr Milch geben als morgens und möchte dies mit einem statistischen Test zum Signifikanzniveau 10% beweisen. Als Teststatistik verwendet er

$$T := \text{Anzahl der Kühe, die abends mehr Milch als morgens gegeben haben}\,.$$

a) Geben Sie die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_A an.
b) Wie ist T unter H_0 verteilt?
c) Bestimmen Sie den beobachteten Wert der Teststatistik.
d) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich (ohne Faustregel).
Vielleicht hilft die folgende Matlab-Ausgabe:

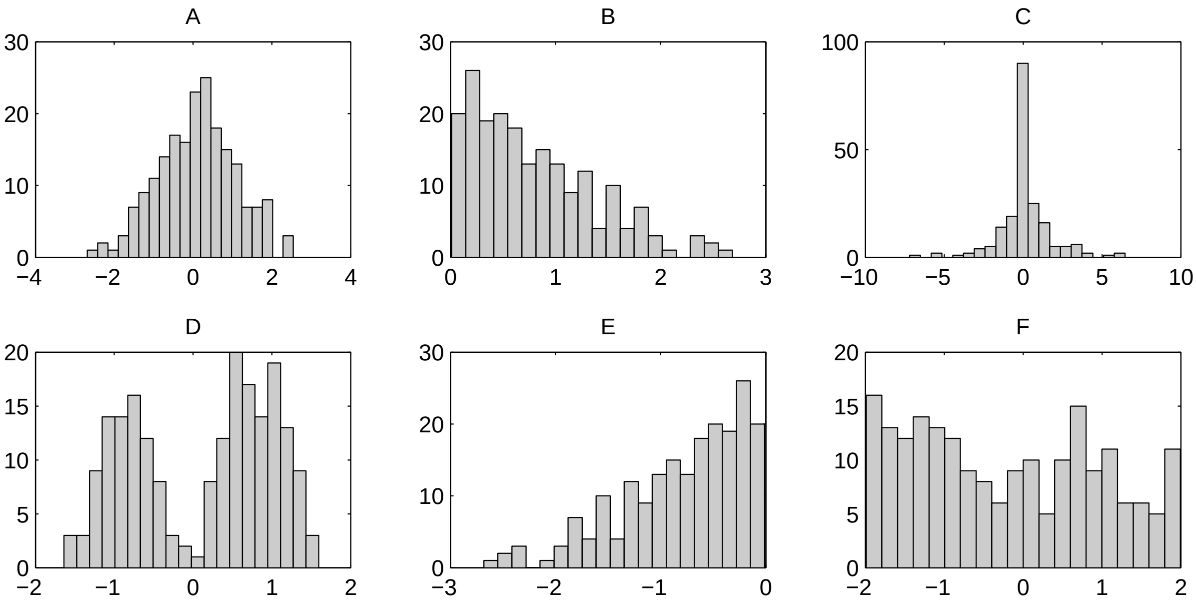
```
>> binocdf(0:11,11,.5)
ans =
  Columns 1 through 6
    0.0005    0.0059    0.0327    0.1133    0.2744    0.5000
  Columns 7 through 12
    0.7256    0.8867    0.9673    0.9941    0.9995    1.0000

>> binocdf(0:11,11,7/11)
ans =
  Columns 1 through 6
    0.0000    0.0003    0.0028    0.0158    0.0613    0.1727
  Columns 7 through 12
    0.3678    0.6117    0.8250    0.9495    0.9931    1.0000
```

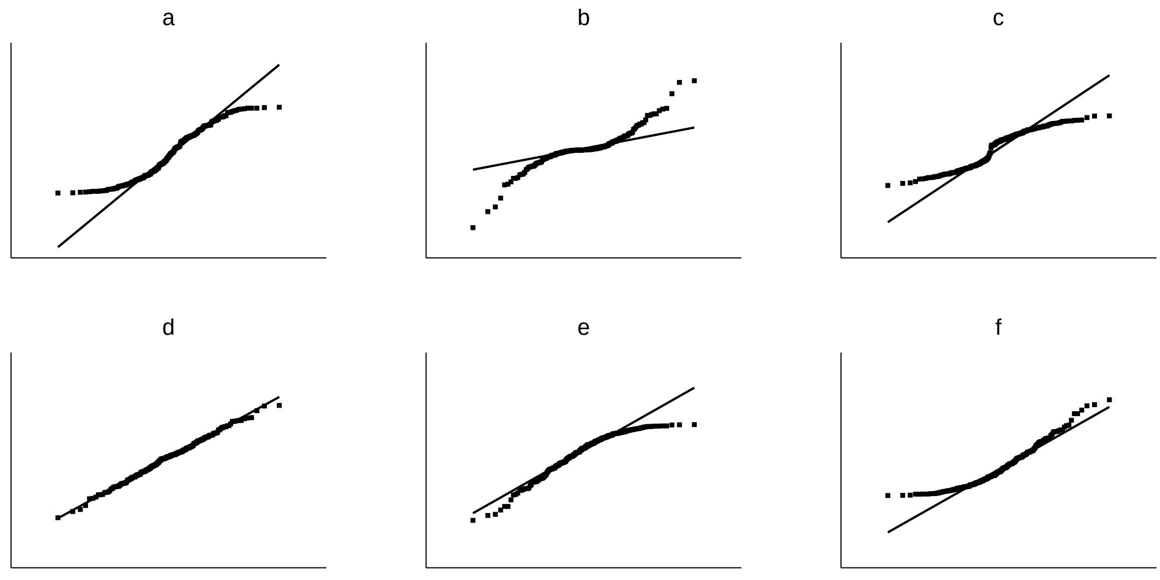
e) Geben Sie die Testentscheidung an.
f) Berechnen Sie auch den zugehörigen p-Wert. Dabei hilft ebenfalls die Matlab-Ausgabe aus (d).

Aufgabe 2 (12 Punkte)

In den folgenden beiden Abbildungen wird für 6 Stichproben vom Umfang 200 jeweils ein Histogramm und ein QQ-Plot gezeigt. Ordnen Sie die Plots einander zu, d.h. notieren Sie Paare von Groß- und Kleinbuchstaben von Plots, die von der gleichen Stichprobe stammen.

Für jede richtige Zuordnung erhalten Sie 2 Punkte für jede falsche Zuordnung werden zwei Punkte abgezogen. Sollte sich dadurch eine negative Punktzahl ergeben, so wird die Aufgabe mit Null Punkten gewertet.





Aufgabe 3 (2+7+2+1 = 12 Punkte)

Ein Makler behauptet, dass Einfamilienhäuser in Tübingen im Schnitt 330 000 € kosten. Sie vermuten aber, dass der Median μ der Verteilung der Hauspreise größer ist. Um dies zu überprüfen, ermitteln Sie die Preise einiger kürzlich verkaufter Häuser

Haus Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis in 1000 €	396	321	333	315	300	339	405	360	375	378

und fühern einen Wilcoxontest zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ durch:

a) Geben Sie die Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_A an.

b) Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik.
Notieren Sie dabei auch alle Zwischenschritte, d.h. geben Sie insbesondere eine Tabelle an, die alle benötigten Ränge enthält.

c) Bestimmen Sie das Verwerfungskriterium.*

d) Geben Sie die Testentscheidung an.

Aufgabe 4 (6+4+1+1 = 12 Punkte)

Beim Schulvergleichstest VERA 4† wurden 2062 brandenburger Schüler entsprechend ihrer Lesekompetenz in drei Niveaus eingeteilt ("elemetare, erweiterte und fortgeschrittene Fähigkeiten"). Außerdem wurde danach unterschieden, ob die Kinder im Alltag regelmäßig Deutsch sprechen ("Deutsch dominante Sprache") oder nicht.

	elementar	erweitert	fortgeschritten	gesamt
Deutsch dominant	593	790	658	2041
Deutsch nicht dominant	12	4	5	21
gesamt	605	794	663	2062

Untersuchen Sie mithilfe eines χ^2-Tests auf Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$, ob die Lesekompetenz eines Kindes davon abhängt, ob es im Alltag regelmäßig Deutsch spricht; gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie die Kontingenztafel der erwarteten Werte.

b) Berechnen Sie den Wert der Teststatistik χ^2.

c) Ermitteln Sie den kritischen Wert gemäß Faustregel.

d) Beschreiben Sie Ihr Testergebnis in einem(!) Satz.

---

*Der Wilcoxon-Test auf Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ verwirft für Stichprobenumfang n, falls $\min(U^+, U^-) \leq U_{\text{krit}}$ (zweiseitig) oder falls $U^- \leq U_{\text{krit}}$ bzw. $U^+ \leq U_{\text{krit}}$ (rechts- bzw. linksseitig). Dabei bezeichnen U^+ und U^- die Rangsummen der positiven und negativen Abweichungen.

n	7	8	9	10	11	12	13
U_{krit} einseitig	3	5	8	10	13	17	21
U_{krit} zweiseitig	2	3	5	8	10	13	17

†vgl. `www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/vera3/upload/download/Laenderbericht_NRW_030613.pdf`

Aufgabe 5 (3+3 = 6 Punkte)

Ihnen liegt eine Stichprobe mit Stichprobenmittel $\overline{x} = 11,3$ und Stichprobenvarianz $s_x^2 = 4{,}0$ vor. Mithilfe eines zweiseitigen z-Tests auf Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ möchten Sie Informationen über den Erwartungswert μ der zugrundeliegenden Verteilung gewinnen. Die Varianz σ^2 dieser Verteilung schätzen Sie durch $\sigma^2 = s_x^2$.

a) Wie groß muss der Stichprobenumfang n mindestens sein, damit $\mu = 10{,}5$ verworfen wird?
b) Für welche Stichprobenumfänge n liegt $\mu = 10{,}8$ im 95%-Vertrauensintervall für den Erwartungswert?

Bemerkung: Rechnen Sie mit $\Phi(1{,}96) = 0{,}975$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Aufgabe 6 (2+1+1+1+4+1 = 10 Punkte)

Um zu testen, ob in einem Paket, das 100 Glühbirnen enthält, weniger als 10 defekte Birnen enthalten sind, prüft ein Händler vor dem Kauf 10 der Birnen und nimmt das Paket nur an, wenn alle 10 funktionieren.

Beschreiben Sie dieses Vorgehen wie folgt anhand unseres Testschemas:

a) Geben Sie die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_A an.
b) Beschreiben Sie die, vom Händler gewählte, Teststatistik X.
c) Welchen Verwerfungsbereich hat der Händler festgelegt?
d) Beschreiben Sie in einem(!) Satz, unter welchen Umständen der Händler einen Fehler erster Art begeht.
e) Wie groß ist beim Vorgehen des Händlers die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art?
f) Kann das Vorgehen des Händlers als Hypothesentest mit Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ aufgefasst werden? Begründen Sie Ihre Antwort in einem(!) Satz.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einem Paket mit 9 defekten Glühbirnen eine Stichprobe mit 10 funktionsfähigen Birnen zu ziehen, beträgt $\frac{91}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdots \frac{82}{91} \approx 37\%$.

Aufgabe 7 (6+4+4 = 14 Punkte)

In Deutschland sind $0,07\%$ der Bevölkerung mit dem HI-Virus infiziert.[‡] Der HIV-Test ELISA fällt bei 99,9% der Infizierten positiv und bei $99,8\%$ der Nicht-Infizierten negativ aus. Für eine zufällig ausgewählte Person werde der ELISA-Test durchgeführt. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$H := \text{“Die Person ist HIV-infiziert”}$$
$$T := \text{“Der ELISA-Test fällt bei dieser Person positiv aus”}$$

a) Geben Sie die Werte der (bedingten) Wahrscheinlichkeiten $P[T|H]$, $P[T|H^C]$, $P[T^C|H]$, $P[T^C|H^C]$, $P[H]$ und $P[H^C]$ an.
b) Der Test falle bei der ausgewählten Person positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich HIV-infiziert ist? Drücken Sie dazu zunächst die gesuchte Wahrscheinlichkeit wie in (a) in der Form $P[\ldots]$ aus und berechnen Sie diese dann.
c) Eine zuvor nicht infizierte Person habe sich durch ungeschützten Geschlechtsverkehr mit einer infizierten Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5% angesteckt und werde danach mit ELISA positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich HIV-infiziert ist, wenn der Test positiv ausfällt?

[‡]Zahlenwerte laut `de.wikipedia.org/wiki/HIV` und `de.wikipedia.org/wiki/HIV-Test`