

Mathematik II für Biologen

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stefan Keppeler

14. Mai 2010

Grundbegriffe: Ereignisse

Wahrscheinlichkeitsmaße: Kolmogorov Axiome

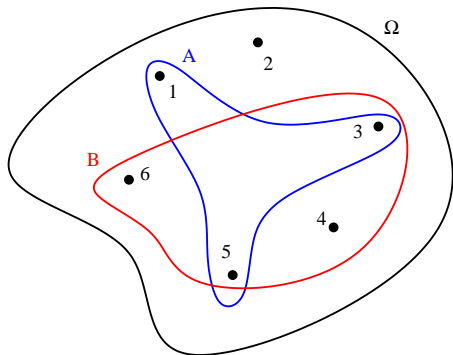
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von Bayes

Beispiel: Diagnostischer Test

Beispiel: Gefangenenparadoxon

- ▶ **Elementarereignis** ω : (nicht weiter zerlegbares) Ergebnis eines einzelnen Experiments
- ▶ **Ereignisraum** Ω : Menge aller Elementarereignisse
- ▶ **Ereignis** A : Teilmenge von Ω




Beispiel: Würfel

$$\Omega = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$$

$$A = \{\square, \square, \square\} \text{ (Ergebnis ungerade)}$$

$$B = \{\square, \square, \square, \square\} \text{ (Ergebnis } \geq 3\text{)}$$

- ▶ Menge aller Ereignisse $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$:
Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von Ω 



Definition: Eine Funktion $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls gilt

(1) $P[\Omega] = 1$

(2) Falls A_1, A_2, \dots disjunkt (d.h. $A_j \cap A_k = \emptyset, \forall j \neq k$), so folgt

$$P \left[\bigcup_{j \geq 1} A_j \right] = \sum_{j \geq 1} P[A_j],$$

insbesondere: Falls A, B disjunkt (d.h. $A \cap B = \emptyset$), so folgt

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B].$$

Beispiele:

- ▶ Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum
- ▶ verschiedene Würfel



Folgerungen:

(i) $P[A^C] = 1 - P[A]$

(ii) $P[\emptyset] = 0$

(iii) Für beliebige $A, B \subset \Omega$ gilt:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

Beweis: 

Beispiel: 

Definition: Seien $A, B \subseteq \Omega$, $P[B] \neq 0$, so heißt

$$P[A|B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B .

Beispiel: 

Definition: Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, falls gilt

$$P[A \cap B] = P[A] P[B].$$

(D.h. $P[A|B] = P[A]$ falls $P[B] \neq 0$ und
 $P[B|A] = P[B]$ falls $P[A] \neq 0$)

Satz von Bayes:

Seien A_1, A_2, \dots, A_n disjunkt, $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$ und

$B \subseteq \Omega$ mit $P[B] \neq 0$ beliebig.

Dann gilt für jedes $j = 1, \dots, n$

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] P[A_j]}{\sum_{k=1}^n P[B|A_k] P[A_k]} .$$


Beweis:



- ▶ Eine Krankheit tritt bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz)
- ▶ Test liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität)
- ▶ Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität)

	Test positiv B	Test negativ B^C
Person krank A_1	o.k.	falsch
Person gesund A_2	falsch	o.k.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?

$$P[A_1|B] = ?$$


- ▶ In einem Gefängnis sitzen drei zum Tode verurteilte Gefangene: Anton, Brigitte und Clemens.
- ▶ Genau einer von ihnen soll begnadigt werden. Dazu wird ein Los gezogen, das allen die gleiche Chance gibt, begnadigt zu werden.
- ▶ Anton, der also eine Überlebenswahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ hat, bittet den Wärter, der das Ergebnis des Losentscheids kennt, ihm einen seiner Leidensgenossen, Brigitte oder Clemens, zu nennen, der oder die sterben muss.
- ▶ Der Wärter antwortet "Brigitte"

Wie hoch ist nun Antons Überlebenswahrscheinlichkeit?

