

Mathematik II für Biologen
Binomialverteilung & Binomialtest

Stefan Keppeler

21. Mai 2010

Kombinatorik

- Permutationen
- Urnenmodelle
- Binomialkoeffizient

Binomialverteilung

- Motivation
- $\text{Bin}(n, p)$
- Histogramme

Binomialtest

- Beispiel
- Faustregeln
- Vorzeichentest

- ▶ Anzahl möglicher Anordnungen von n (unterschiedlichen) Elementen:

$$n(n-1) \cdots 1 = n!$$



Beispiel: $n = 3$ Kugeln, $\bullet \bullet \bullet$, lassen sich auf $3! = 6$ verschiedene Möglichkeiten anordnen:

$(\bullet \bullet \bullet)$ $(\bullet \bullet \bullet)$ $(\bullet \bullet \bullet)$ $(\bullet \bullet \bullet)$ $(\bullet \bullet \bullet)$ $(\bullet \bullet \bullet)$

- ▶ Anzahl möglicher Anordnungen von n Elementen, die in j Gruppen mit jeweils k_1, k_2, \dots, k_j gleichen Elementen vorkommen ($k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$):

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_j!}$$

Beispiel: $k_1 = 2$ rote Kugeln und $k_2 = 1$ blaue Kugel, $\bullet \bullet \bullet$, lassen sich auf $\frac{3!}{2!1!} = 3$ verschiedene Möglichkeiten anordnen:

$(\bullet \bullet \bullet)$ $(\bullet \bullet \bullet)$ $(\bullet \bullet \bullet)$



- ▶ Urne mit n unterschiedlichen Kugeln
- ▶ Ziehe k Kugeln

Anzahl der möglichen Ergebnisse:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	n^k <p>Würfelergebnisse: $6^3 = 216$</p>	$\frac{n!}{(n-k)!}$ <p>zweifarbige Zwerge: $6 \cdot 5 = 30$</p>
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$ <p>Kartenzahl: $\binom{6+3-1}{3} = 56$</p>	$\frac{n!}{(n-k)! k!} =: \binom{n}{k}$ <p>dreifarbig Zwerge: $\binom{6}{3} = 20$</p>

Beispiel: **Würfelzwerge** (ÜA 20)

Dabei heißt

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient, lies “ n über k ” oder “ k aus n ”.

Beispiele: 

- ▶ Betrachte ein Experiment mit zwei möglichen Ergebnissen.
- ▶ Nenne den einen Ausgang “Erfolg”, den anderen “Misserfolg”.
- ▶ Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei $p \in [0, 1]$.
- ▶ Führe das Experiment n mal unabhängig durch (keine gegenseitige Beeinflussung der Einzelergebnisse).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge? ($0 \leq k \leq n$)

Beispiele: (jeweils n Würfe)

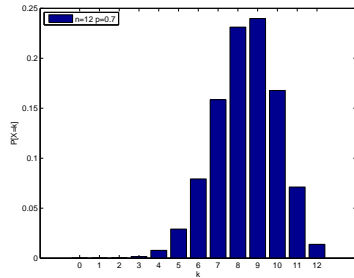
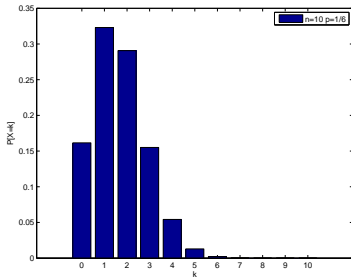
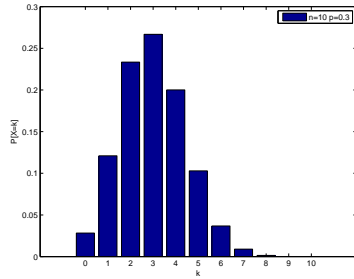
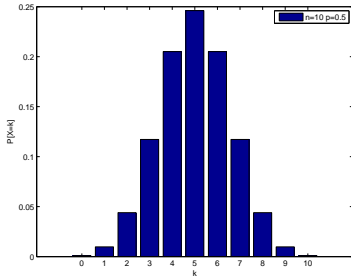
- ▶ faire Münze, $X = \#$ Zahl, $p = \frac{1}{2}$
- ▶ unfaire Münze, $X = \#$ Zahl, z.B. $p = 0,3$
- ▶ fairer Würfel, $X = \#$ Sechsen, $p = \frac{1}{6}$

Satz: Bei einer Serie von n unabhängigen Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p , $0 \leq p \leq 1$, ist die Verteilung der Anzahl X der Erfolge gegeben durch

$$P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Man sagt X ist **binomialverteilt** mit Parametern n und p ,
Schreibweise $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Beweis: 




Beispiel: Spermasexing

- ▶ Rindersperma wird optisch nach den y-Chromosomen sortiert.
- ▶ $n = 12$ Kühe werden damit besamt.
- ▶ “Erfolg”: weibliches Kalb – ♀
“Misserfolg”: männliches (oder gar kein) Kalb – ♂
- ▶ p : Wahrscheinlichkeit, dass (einmalige) Besamung zu ♀ führt
(Ziel: $p \approx 1$, denn ♀ gibt Milch, ♂ nicht)
- ▶ $X = \#$ gelungene Experimente = $\#$ ♀

Anbieter der Methode behauptet $p > 0,7$ und will dies durch einen statistischen Test beweisen.

- ▶ Wir erhalten $X = 11$ (d.h. $11/12 \approx 92\%$ Erfolgsquote)

Test:  (verwende in Testschritt 4 statt Simulation nun Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Faustregeln für den Binomialtest

Falls $np(1-p)$ groß ist (> 9), so ist für $\alpha = 5\%$

- ▶ der Annahmehbereich K^C zu
 $H_0 : p = p_0$ und $H_A : p \neq p_0$ etwa

$$K^C \approx \left[np_0 - 2\sqrt{np_0(1-p_0)}, np_0 + 2\sqrt{np_0(1-p_0)} \right]$$

und

- ▶ das 95%-Vertrauensintervall für den wahren Wert von p

$$\approx \left[\frac{X}{n} - 2\sqrt{\frac{1}{n} \frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)}, \frac{X}{n} + 2\sqrt{\frac{1}{n} \frac{X}{n} \left(1 - \frac{X}{n}\right)} \right].$$

Begründung (später): Wird näherungsweise Normalverteilung

Spezialfall des Binomialtests mit $p_0 = \frac{1}{2}$: Vorzeichentest

Beispiel:

- ▶ Eine Waage gelte als geeicht, falls sie
 - ▶ mit Wahrscheinlichkeit 50% einen zu großen und
 - ▶ mit Wahrscheinlichkeit 50% einen zu kleinen Wert anzeigt.
- ▶ Sollwert 20 kg, $n = 10$ Messungen ergeben (in kg):
20,1 20,3 20,9 19,2 20,8 20,1 20,2 20,4 20,2 20,3
- ▶ Test 