Bsp Potenzmenge

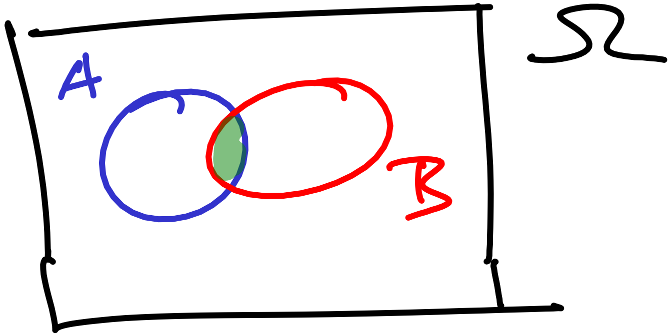
$\Omega = \{a, b, c\}$ ← 3 Elemente

$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega) =$ "Menge aller Teilmengen von Ω"

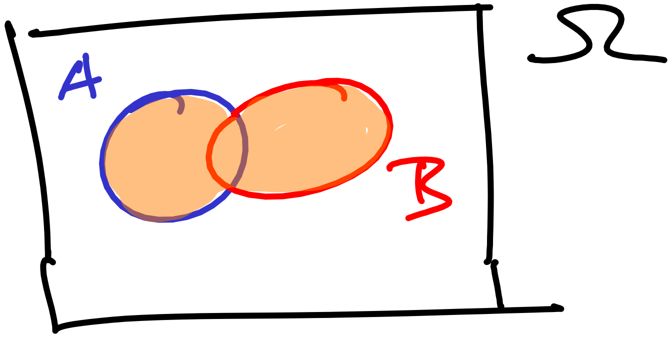
$= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \Omega\}$

↑ leere Menge $\emptyset = \{\}$

↖ 8 Elemente (selbst wieder Menge)

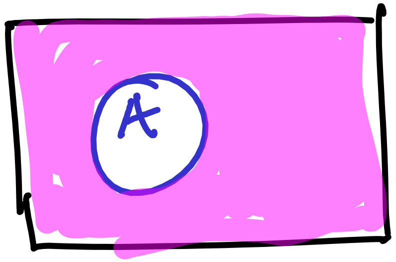


$A \cap B$



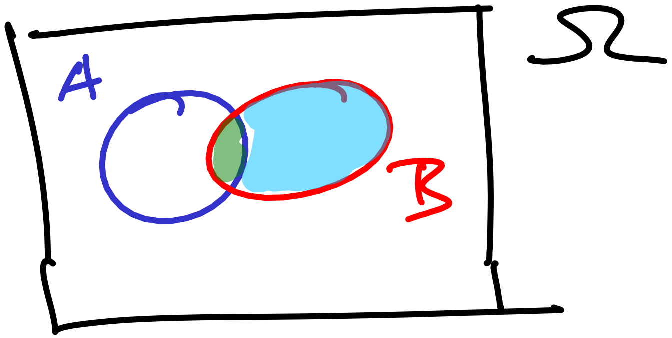
$A \cup B$

(A, B disjunkt $\iff$ $A \cap B = \emptyset$)



$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$

"Komplement"



$$B \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in B \ \underline{\text{und}} \ \omega \notin A\}$$
$$= B \cap A^c$$

Laplace'scher W'Raum

Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis gleich groß

$\omega_1, \omega_2 \in \Omega$: $P[\omega_1] = P[\omega_2]$

Ereignis $A \subseteq \Omega$

$$P[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{Anzahl der Elemente in } A}{\text{Anzahl der Elemente in } \Omega}$$

erfüllt (1) und (2)

- Würfel $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,3,5\}, \quad B = \{3,4,5,6\}$

- Laplace-Würfel (fairer Würfel)

$P[A] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P[B] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- unfairer Würfel

$P[\{1\}] = \frac{1}{12}, \quad P[\{6\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$

$P[\{j\}] = \frac{1}{6}, \quad j = 2,3,4,5$

erfüllt auch (1) und (2), aber nicht Laplacesch

$P[A] = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

$P[B] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Beweise für Folgerunge

(i) $$P[A \cup A^c] = P[\Omega] \underset{(1)}{=} 1$$

$$\underset{(2)}{=} P[A] + P[A^c]$$

$$\Rightarrow P[A^c] = 1 - P[A]$$

(ii) $$P[\emptyset] \underset{(i)}{=} 1 - P[\Omega] \underset{(1)}{=} 1 - 1 = 0$$

(iii) $$P[A \cup B] = P[A \cup (B \setminus A)]$$

$$\underset{(2)}{=} P[A] + \underbrace{P[B \setminus A] + P[A \cap B]}_{\text{disjunkt}} - P[A \cap B]$$

$$\underset{(2)}{=} P[A] + P[\underbrace{(B \setminus A) \cup (A \cap B)}_{= B}] - P[A \cap B]$$

$\square$

Bsp. Würfel

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$

$$P[A \cup B] = P[\{1, 3, 4, 5, 6\}]$$

gleich laut (iii)

$$= \frac{5}{6} \quad \text{Laplace-Würfel}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$= P[\{1,3,5\}] + P[\{3,4,5,6\}] - P[\{3,5\}]$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Bspe für bedingte W'heiten

Würfel von oben

$$P[A|B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]} = \frac{P[\{3,5\}]}{P[\{3,4,5,6\}]}$$

$$= \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}$$ Laplace-Würfel

$$P[B|A] = \frac{P[A\cap B]}{P[A]} = \frac{P[\{3,5\}]}{P[\{1,3,5\}]}$$

$$= \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$ Laplace-Würfel

Beweis zum Satz von Bayes

$$P[A_j \mid B] = \frac{P[A_j \cap B]}{P[B]} \cdot \frac{P[A_j]}{P[A_j]}$$

$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{P[B]}$$

auch oft hilfreich

$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{P[B \cap \Omega]}$$

$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{P[B \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)]}$$

$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[B \cap A_k]} = \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[B \mid A_k] \cdot P[A_k]}$$

$\square$

Bsp Diagnostischer Test

$$P[A_1 | B] = ?$$

$$P[A_1] = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad P[A_2] = 0{,}99 \quad (\text{da } A_2 = A_1^c)$$

$$P[B | A_1] = 0{,}98$$

$$P[B^c | A_2] = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad P[B | A_2] = 0{,}05$$

$$P[A_1 | B] = \frac{P[B|A_1]\,P[A_1]}{P[B|A_1]\,P[A_1] + P[B|A_2]\,P[A_2]}$$

$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}01}{0{,}98 \cdot 0{,}01 + 0{,}05 \cdot 0{,}99} = \frac{98}{98 + 495} \approx \frac{1}{6}$$

Gefangenenparadoxon

A_b : Anton wurde begnadigt

B_b : Brigitte —— " ——

C_b : Clemens —— " ——

B_g : Brigitte wurde genannt

C_g : Clemens wurde genannt

$$P[A_b \mid B_g] = ?$$

$$P[A_b] = P[B_b] = P[C_b] = \frac{1}{3}$$

$$P[B_g \mid A_b] = \frac{1}{2} = P[C_g \mid A_b]$$

$$P[B_g \mid B_b] = 0 = P[C_g \mid C_b]$$

$$P[B_g \mid C_b] = 1 = P[C_g \mid B_b]$$

$$P[A_b \mid B_g] = \frac{P[B_g \mid A_b]\, P[A_b]}{P[B_g]}$$

$$= \frac{P[B_g \mid A_b]\, P[A_b]}{P[B_g \mid A_b]\, P[A_b] + P[B_g \mid B_b]\, P[B_b] + P[B_g \mid C_b]\, P[C_b]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

und damit $P[C_b \mid B_g] = \frac{2}{3}$