Fakultät

$$0! := 1$$

$$n! := n \cdot (n-1)! \quad \forall\, n \geq 1$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Urnenmodell: ohne Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1. Kugel

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,0!} = 1 \qquad (0! = 1) \qquad (i)$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n \qquad (ii)$$

Def: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad (iii)$$

$\binom{n}{k} := 0$ falls $k > n$

$\Rightarrow \binom{n}{n} = 1$ da $\binom{n}{n} \underset{(iii)}{=} \binom{n}{n-n} \underset{(i)}{=} \binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n-1} = n$ aus (iii) und (ii)

Herleitung Binomialverteilung

Bsp:

$$P[-++-+++--] \overset{\text{unabhängige Ereignisse}}{=} P[+]^5 \, P[-]^4$$

$$= \underbrace{p^5 (1-p)^4}_{\text{Wahrscheinlichkeit für genau diese Sequenz}}$$

andere Möglichkeiten für 5x "+" und 4x "–"
durch anderes Anordnen der Plus- und Minus-Zeichen.

hier: 9 Elemente, davon je 5 und 4 gleich

$\Rightarrow \binom{9}{5}$ Möglichkeiten $\quad \frac{9!}{5!\,4!}$

allgemein: n Elemente, davon k mal $+$ und $n-k$ mal $-$

$$\Longrightarrow \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \text{ Möglichkeiten}$$

Wahrsch. für eine solche Sequenz: $p^k (1-p)^{n-k}$

Binomialtest: Spermasexing

1. H_0: $p = 0{,}7$
2. H_A: $p > 0{,}7$ will Hersteller beweisen
3. Teststatistik $X = \#♀$ bei $n = 12$ Versuche
4. Verteilung von X unter H_0

$$X \sim \mathrm{Bin}(\underset{n}{12};\ \underset{p_0}{0{,}7})$$

5. Signifikanzniveau

$$\alpha = 5\%$$

6. Verwerfungsbereich $K = ?$

mit $P_{H_0}[X \in K] \leq \alpha \ (= 5\%)$

$$P_{H_0}[X = 12] = \binom{12}{12}(0{,}7)^{12}(0{,}3)^0 = 0{,}7^{12} \approx 1{,}38\%$$

$$P_{H_0}[X=11] = \binom{12}{11}(0,7)^{11}(0,3)^{1} \approx 6,53\%$$

$$\Longrightarrow \quad K = \{12\}$$

7 $X = 11$ (Test durchgeführt)

8 Testentscheidung: H_0 wird nicht verworfen.

---

alternativ mit p-Wert

1 - 5 wie gehabt

6 entfällt

7 wie gehabt

8 entfällt

9 p-Wert: $P_{H_0}[X \geq 11] = P_{H_0}[X=11] + P_{H_0}[X=12] \approx 7,9\%$

10 Testentscheidung: nicht verwerfen, da

p-Wert $> \alpha = 5\%$

andere Schreibweise für VI:

$$p = \frac{x}{n} \pm 2\sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)}$$

(95%-VI beim Binomialtest mit Faustregel)

Vorzeichentest:

① H_0: Waage geeicht

② H_A: Waage nicht geeicht

③ $T = \#\{\text{Werte} < 20\}$

④ $T \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$

erst p-Wert

⑦ $T = 1$

beidseitig

⑨ $\left(P_{H_0}[T \leq 1]\right) \cdot 2 = \left[\binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\right] \cdot 2$

$$= \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 2$$

$$= \frac{22}{1024} \approx 2\%$$

⑩ H_0 wird auf 5%-Niveau verworfen