Erwartungswert für $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P[X=k]$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \underbrace{k \cdot \binom{n}{k}}_{= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= n p \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1}$$

$= 1$ da alle Wahrsch. für eine ZV die Bin$(n-1,p)$-verteilt

Linearität von $E[\cdot]$

$$E[aX+bY] = \sum_{k,l} (ak+bl)\, P[X=k \text{ und } Y=l]$$

$$= a \sum_{k,l} \underline{\underline{k}}\, P[X=k \text{ und } Y=l] + b \sum_{k,l} l\, P[X=k \text{ und } Y=l]$$

egal

$$= a \sum_{k} k\, P[X=k] + b \sum_{l=} l \cdot P[Y=l]$$

$$= a\, E[X] + b\, E[Y]$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2]$$

ZV

Linearität

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2$$

Erwartungstreue

① Mittelwert $\quad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad , \quad x_i \to X_i$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \underset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X_i]}_{\text{gleich für alle } i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X] = E[X]$$

② empirische Varianz, zunächst umschreiben

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2\frac{x_i}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{n^2} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}_{= \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} x_j x_h}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2\,\frac{x_i}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{n^2} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2}_{= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k} \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \underbrace{- \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j + \underbrace{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k}_{= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k}}_{= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k} \Bigg]$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{x_i^2}{n}}_{\frac{x_i^2 + x_j^2}{2n}} - \frac{2 x_i x_j}{2n} \right) \right) = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2$$

jetzt $x_i \longrightarrow X_i$

$$E\left[\frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i-X_j)^2\right]$$

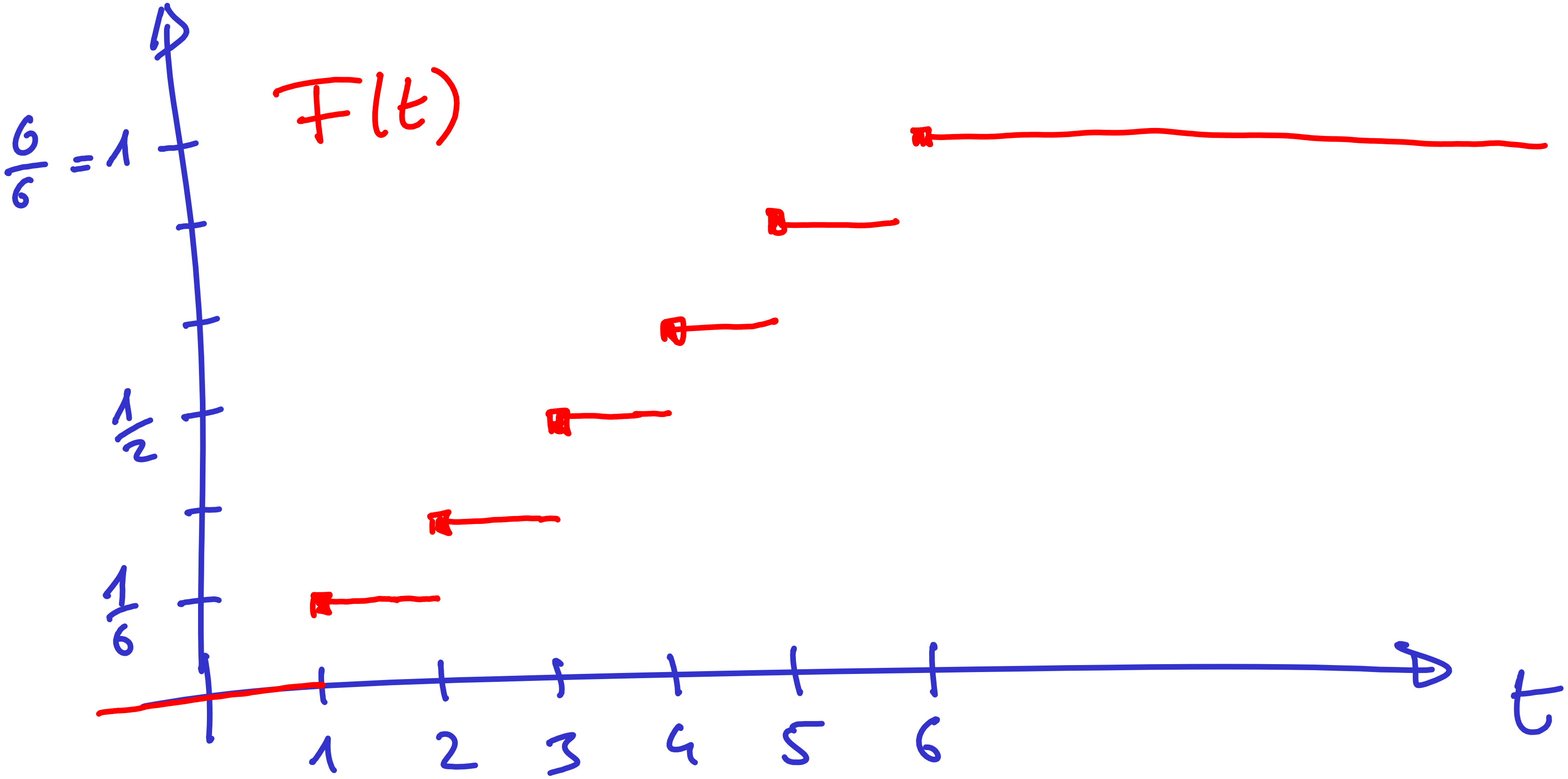
$$=\frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{E[X_i^2]}_{=E[X^2]}\underbrace{-2E[X_iX_j]}+\underbrace{E[X_j^2]}_{=E[X^2]}\right)$$

$$=-2\begin{cases}E[X_i]E[X_j], & i\neq j \quad \text{weil unabhängig}\\ E[X_i^2], & i=j\end{cases}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}n(n-1)}\left(\cancel{2}n^2E[X^2]-\cancel{2}\underbrace{n}_{\text{so oft ist } i=j}E[X^2]-\cancel{2}\underbrace{(n^2-n)}_{\text{so oft ist } i\neq j}(E[X])^2\right)$$

$$=E[X^2]-(E[X])^2=Var(X)$$

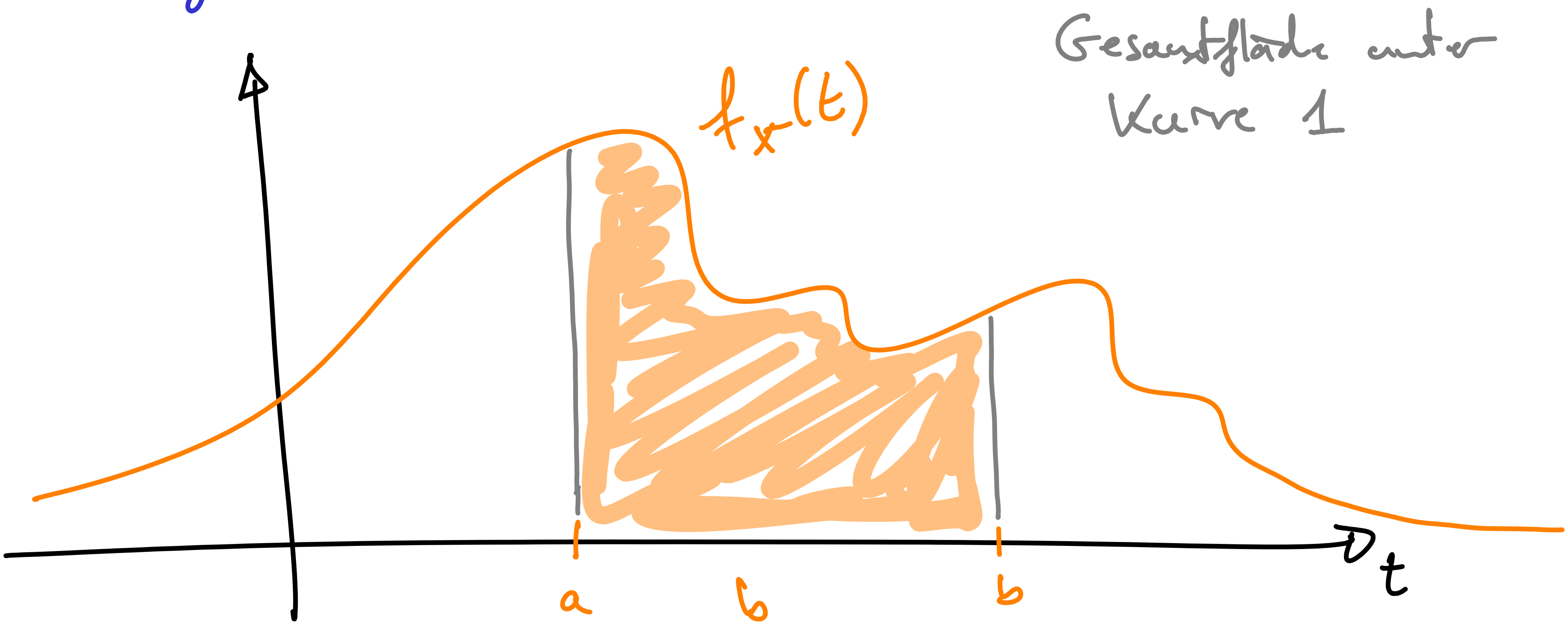
Verteilungsfkt. für Erg. eines fairen Würfelwurfs



wieder Schüttelhause

(Warte-) Zeit zwischen zwei Beben kann jeden Wert $t \in [0, \infty)$ annehmen.

stetige ZV



$$P[a \le X \le b] = \int_a^b f_X(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a)$$

nochmal Schnittellause

\# Bebe pro Jahr $\sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = 8$

$\Rightarrow$ Y = # Bebe pro Zeitintervall t (in Jahren)

$$Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$$

ZV: T = Zeit bis zum nächste Beben

$$F_T(t) = P[T \leq t] = 1 - P[Y = 0]$$

mind. ein Beben im Zeitintervall der Länge t

$$= 1 - e^{-\lambda t} \underbrace{\frac{(\lambda t)^0}{0!}}_{=1}$$

$$\Rightarrow f_T(t) = F_T'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$