

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 1 (Abgabe am 22.04.2010 vor der Vorlesung in M1)

In den Übungen vom 19.-23.4.10 wird Blatt 15 aus dem Wintersemester besprochen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int \sin^3 x \, dx$ b) $\int \sin^5 x \, dx$ c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$ und b) $\int_0^\infty \frac{5x + 3}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} dx$.

HINWEIS: -1 ist eine Nullstelle des Nenners.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \, dt$$

heißt Gammafunktion und ist für alle $s \in \mathbb{R}^+$ wohldefiniert. (Warum?) Zeigen Sie:

a) $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

HINWEIS: Vollständige Induktion & partielle Integration.

b)

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-xt} \, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{HINWEIS: Substitution.}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Berechnen Sie dazu zunächst die Lösungen der jeweiligen homogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung finden Sie dann entweder durch Raten oder durch Variation der Konstanten.

a) $y' - 3y = 5$ b) $y' - 3y = e^{2x}$ c) $y' - 3y = \sin(x)$ d) $y' - \cos(x)y = 2 \cos(x)$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' - 3y = e^{2x}, \quad y(0) = 3$ b) $y' + (1 + y^2)x = 0, \quad y(0) = 1$