

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (keine Abgabe)

Aufgabe 49

Sie würfeln einmal mit einem (fairen) zwanzigseitigen Würfel und bestimmen so den Wert der Zufallsvariablen X_1 (d.h. $X_1(\Omega) = \{1, 2, \dots, 20\}$). Erhalten Sie beim ersten Wurf eine 1, so würfeln Sie nochmals mit demselben Würfel und bestimmen so den Wert von X_2 . Für $2 \leq X_1 \leq 11$ würfeln Sie mit einem (fairen) sechsseitigen Würfel und bestimmen so den Wert von X_2 . In allen anderen Fällen ($X_1 \geq 12$) würfeln Sie nicht noch einmal – der Wert von X_2 ist dann Null.



- Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
- Bestimmen Sie $P(X_2=4)$ und $P(X_2 \geq 3)$.
- Berechnen Sie $E(X_2)$ und $\text{Var}(X_2)$.

Aufgabe 50

- Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Bestimmen Sie $\text{Var}(X)$.
- Sei $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$. Bestimmen Sie $\text{Var}(Y)$.

HINWEIS: Die Erwartungswerte Binomial- und Poisson-verteilter ZV haben wir in der Vorlesung berechnet, $E(X) = np$ und $E(Y) = \lambda$.

Aufgabe 51

Wir möchten die folgende Frage beantworten:

Wie oft muss man mit einem fairen Würfel würfeln, damit die relative Häufigkeit für das Ergebnis Ⓜ mit 95%iger Wahrscheinlichkeit um weniger als 10% von $\frac{1}{6}$ abweicht?

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Sei X die Anzahl der Ⓜ aus n Würfeln. Wie ist X verteilt? Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.
- Definieren Sie $Y := \frac{X}{n}$. Bestimmen Sie $E(Y)$ und $\text{Var}(Y)$.
- Wenden Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung für Y an, um eine Antwort auf die Ausgangsfrage zu erhalten.

Für große n besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass die Zufallsvariable Y näherungsweise normalverteilt ist, d.h. $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, mit den oben berechneten Werten für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 . Für normalverteilte Zufallsvariablen Z , d.h. $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gilt $P(|Z - \mu| < 2\sigma) \approx 95\%$. Verbessern Sie damit Ihr Ergebnis von oben.