

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 2 (Abgabe am 29.4.2010)

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie in Teil a auch die Menge aller reellen Lösungen an.

a) $y'' - 2y' + 5y = 0$ b) $y'' + 6y' + 9y = 0$ c) $y'' + 7y' + 10y = 0$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ b) $\frac{y'}{\cos x} = y^2, \quad y(0) = 1$
c) $y'' - 2y' + 5y = e^{-3x}, \quad y(0) = y'(0) = \frac{1}{20}$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Wie betrachten das AWP $y'(x) = y(x) - 1, \quad y(0) = 0$.

- Lösen Sie das AWP (wie in Aufgabe 5).
- Bestimmen Sie alle Picard-Iterierten $y_n(x), n \in \mathbb{N}_0$, für das AWP.
- Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ und vergleichen Sie mit Teil a.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

- a) Zeichnen Sie die folgende Teilmenge des \mathbb{R}^2 : b) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}' = D_\phi \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \right\} \qquad D_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

HINWEIS: Falls Ihnen die Gleichung nicht bekannt vorkommt, dann werfen Sie mal einen Blick auf <http://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse>.

- bewirkt eine Drehung des Vektors \vec{x} .
- Illustrieren Sie dies für $\phi = \frac{\pi}{3}$ und die Vektoren $(0, 2)^T$ und $(1, 2)^T$ mit einer Zeichnung.
 - Zeigen Sie: $D_\phi^{-1} = D_\phi^T = D_{-\phi}$ (d.h. $\vec{x} = D_{-\phi} \vec{x}'$).

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

und geben sie zugehörige Eigenvektoren an.

Aufgabe 11 (10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: Ist $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär und gilt $U\vec{x} = \lambda\vec{x}$ für ein $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$, so folgt: $|\lambda| = 1$.