

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 6.5.2010)

Aufgabe 12

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von (vgl. Klausur WS 09/10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.

Aufgabe 13

(10 Punkte)

Berechnen Sie e^{iAx} für $x \in \mathbb{R}$ und A aus Aufgabe 10.

HINWEIS: $\overline{U}^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14

(10 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $6x^2 + 4xy + 9y^2 = 10$ b) $3x^2 + 8xy + 3y^2 = 1$ c) $12x_1^2 + 36x_1x_2 + 27x_2^2 = 13$

Aufgabe 15

(10 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j$.

b) Gegeben sei die quadratische Form ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x+z) + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a ?

Aufgabe 16

(10 Punkte)

Die 2×2 -Matrix A besitze die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_1 = (1, -1)^T$ und $\vec{u}_2 = (1, 1)^T$. Wie lautet die Matrix A ?