Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2010

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe ausnahmsweise am **Mittwoch, 12.5.2010, vor 14:00,** in die vor C6P43 ausgelegten Mappen.)

Aufgabe 17 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^6} & , \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & , \quad x=y=0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion $g : x \mapsto f(x, y_0)$ für beliebiges aber festes $y_0 \in \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{?\}$.

b) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.

c) Ist f in $\vec{0}$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 18 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} - z^3 + xyz$.

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f (d.h. f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy} und f_{zz}. Ist f total differenzierbar?

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (0, -1, \pi)^T$ in Richtung von $(-1, 0, 1)^T$.

c) Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}(t))$ für die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Vergleichen Sie das Ergebnis an der Stelle $t = \pi$ mit dem Ergebnis aus Teil b.

Aufgabe 19 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,

b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$ und

c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an.

Aufgabe 20 (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_{\mathfrak{K}} \begin{pmatrix} y \\ x-z \\ 2z\,\mathrm{e}^{z^2} - y \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{x} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ \sin t \end{pmatrix} \, , \; t \in [0, 2\pi] \, .$$