Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2010

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 20.5.2010)

Aufgabe 21 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \frac{e^x}{1-y}$ um $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y) = \frac{e^x}{1-y}$ und $g(x,y,z) = \cos(y) + e^{xy} + \sinh(xyz)$.

c) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung um den Punkt $(1,0,-1)$ von

$$f(x,y,z) = x^3 - 3x^2 + xy + yz + 2x + 2z - 1\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (2x^2-1)y^2\,.$$

Geben Sie an, ob dort Minima oder Maxima vorliegen. Bestimmen Sie auch alle Stellen, an denen sich Sattelpunkte befinden.

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}\,'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}\,, \quad \vec{y}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}\,.$$

a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = (0\ 1\ \ -1\ 1)^T$, mit A aus Aufgabe 12.

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{$*$}$$

um auf ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} ,$$

und suchen Sie eine Matrix A, so daß $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Bemerkung: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?