Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2010

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 9.6.2010)

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle Minima, Maxima und Sattelpunkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Aufgabe 31 (10 Punkte)
Ist das folgende Vektorfeld konservativ? Geben Sie ggf. eine Stammfunktion an.

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x^2+y} + z\sin(xz) \\ \mathrm{e}^{y} \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\ x\sin(xz) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie außerdem $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{smallmatrix}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$ und skizzieren Sie $\mathfrak{K}$.

Aufgabe 32 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Fläche der Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

Aufgabe 33 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0,1]^3$ mit Dichte

$$f(x,y,z) = xy^2\,\mathrm{e}^{xyz} + z\,\mathrm{e}^{yz} ,$$

d.h. berechnen Sie $m := \int_W f\,\mathrm{d}V$.

Aufgabe 34 (parabolische Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)
Sei $\vec{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{x}(q_1,q_2,q_3) = \begin{pmatrix} q_1 q_2 \\ \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2) \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x,y,z:\ \text{kartesisch}) .$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}$ für alle q_1, q_2, q_3 mit $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ lokal invertierbar ist – dort also krummlinige Koordinaten definiert werden.
b) Sind diese Koordinaten orthogonal? Bilden sie ein Rechtssystem? Wie lautet das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in diesen Koordinaten?