Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2010

# Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 17.6.2010)

---

**Aufgabe 35** (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen einer Kugelschale mit Innenradius $R$ und Dicke $d$, d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K \mathrm{d}V$ für

$$K := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, R \leq |\vec{x}| \leq R + d \right\} .$$

Bestimmen Sie auch $\lim\limits_{d \to 0} \frac{|K|}{d}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 36** (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten $(r, \varphi, z)$, definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} , \quad (x, y, z : \text{ kartesisch}) .$$

b) Bestimmen Sie das Volumen von $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq z,\, 0 \leq z \leq 2 \right\}$, und skizzieren Sie $K$.

c) Berechnen Sie die Oberfläche von $K$.

**Aufgabe 37** (10 Punkte)

Seien $q_1, q_2, q_3$ die parabolischen Zylinderkoordinaten aus Aufgabe 34 sowie

$$\widetilde{K} = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq q_j \leq 1 \,,\ j = 1, 2, 3 \right\} \quad \text{und} \quad K = \vec{x}(\widetilde{K}) .$$

Skizzieren Sie $K$ und berechnen Sie das Volumen $|K|$.

**Aufgabe 38** (10 Punkte)

Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei $K$ die Kugel mit Radius $R$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial K} \vec{f}\vec{n}_i \,\mathrm{d}O$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).

**Aufgabe 39** (10 Punkte)

a) Sei $\lambda > 0$. Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x$.
Hinweis: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\vec{x}^T D \vec{x}} \,\mathrm{d}V = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n .$$

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit. Bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\vec{x}^T A \vec{x}} \,\mathrm{d}V$.
Hinweis: Laut Satz 24 existiert eine orthogonale Matrix $U$, so dass $U^T A U$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich an.