Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2010

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 24.6.2010)

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R.

a) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{f}$.

b) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{K\setminus\{\vec{0}\}} \operatorname{div} \vec{f} \, \mathrm{d}V$ für $\alpha > 3$.

c) Bilden Sie den Limes $\alpha \to 3$ Ihres Ergebnisses aus b und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabe 38 für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + \mathrm{e}^{-x^2} \\ \cos y + 3x \\ \tanh z \end{pmatrix} ;$$

dabei sei $\mathfrak{K}$ der im Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis in der xy-Ebene.

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2 \,,\; z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S.

Hinweis: Ebene Polarkoordinaten, $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ergänzen Sie die folgenden Mengen von Teilmengen von Ω jeweils zur kleinstmöglichen Algebra $\mathcal{A}$ über Ω.

a) $\big\{\{2\}, \{1, 3, 4, 5\}\big\}$

b) $\big\{\emptyset, \{2, 5\}\big\}$

c) $\{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$

d) $\{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 5\}$

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ die Menge aller offenen Intervalle (a, b) aus $\mathbb{R}$ sowie
$\mathcal{M}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ aus $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Die erzeugten σ-Algebren sind gleich[2], d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$.

---

[2]Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$.