Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2010

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 8.7.2010

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 37 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+6+4 = 14 Punkte)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\sinh(x)\,\mathrm{d}x$. Hinweis: Zweifache partielle Integration.

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1+x^2}{x^4-5x^2+4}$.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1+x^2}{x^4-5x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 (6+4 = 10 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{Bx} = \begin{pmatrix} \cosh(3x) & 0 & \sinh(3x) \\ 0 & \mathrm{e}^{7x} & 0 \\ \sinh(3x) & 0 & \cosh(3x) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Berechnen Sie $\det B$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' + y^2(x-1)^3 = 0$, $y(1) = 4$.

Aufgabe 4 (4+2+4=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 6y' + 9y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 6y' + 9y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 5 (4+6 = 10 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\displaystyle\int_0^{\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Hinweis: Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) sind sinnvoll; es gilt dann $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

Aufgabe 6 (4+4+6+6 = 20 Punkte)

Seien $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ und die Kurve $\mathfrak{K}$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{K}:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \cos(2t) \\ \sin t \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\pi],$$

und sei weiter $\mathcal{F}$ die obere Halbsphäre

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = R \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

a) Berechnen Sie ∇F.
b) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} (\nabla F)\, \mathrm{d}\vec{x}$.
c) Berechnen Sie das Oberflächenelement $\mathrm{d}\vec{O} = \vec{x}_\theta \times \vec{x}_\phi \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ auf $\mathcal{F}$.
d) Bestimmen Sie den Fluss von ∇F durch $\mathcal{F}$, d.h. berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} (\nabla F)\, \mathrm{d}\vec{O}$.
   HINWEIS: $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$.

Aufgabe 7 (6+6 = 12 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \left(\tfrac{3}{4} + x^2\right) \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, d.h. bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $(\nabla f)(\vec{x}) = 0$.
b) Untersuchen Sie für alle kritischen Punkte, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \cos y \\ \sinh x \sin y \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von $(x,y) = (0, \frac{\pi}{2})$ eine lokale Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, und berechnen Sie ${f^{-1}}'(0,0)$.

HINWEIS: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

Aufgabe 9 (4+4 = 8 Punkte)

Die Kiesel in einem Flussbett stammen entweder aus Gebirge A oder Gebirge B, und zwar stammen 40% der Kiesel aus Gebirge A und 60% aus Gebirge B. 80% der Kiesel aus Gebirge A und 30% der Kiesel aus Gebirge B sind Quarzit-Kiesel. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

A := "Kiesel stammt aus Gebirge A"
B := "Kiesel stammt aus Gebirge B"
Q := "Kiesel ist ein Quarzit-Kiesel"

a) Geben Sie $P(A)$, $P(B)$, $P(Q|A)$ sowie $P(Q|B)$ an.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Quarzit-Kiesel aus dem Gebirge B stammt.