Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 10

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 07.10.2010

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 102 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 37 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+6+4 = 14 Punkte)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\cosh(x)\,\mathrm{d}x$. HINWEIS: Zweifache partielle Integration.

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x-1}{(x^2-5x+4)^2}$.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{x-1}{(x^2-5x+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $2y' = y^3 \sin x$, $y(0) = 1$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' - 4y' + 5y = 0$.

b) Lösen Sie das AWP $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' - 4y' + 5y = \sin(2x)$.

Aufgabe 4 (6+2+4 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass gilt $U^T A U = D$.

c) Berechnen Sie e^{At}.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 = 5$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, d.h. bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $(\nabla f)(\vec{x}) = 0$.

b) Untersuchen Sie für alle kritischen Punkte, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

c) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von f um $(0, 1)$.

Aufgabe 7 (4+4+4 = 12 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$ und b) $\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [-1, 1]$.

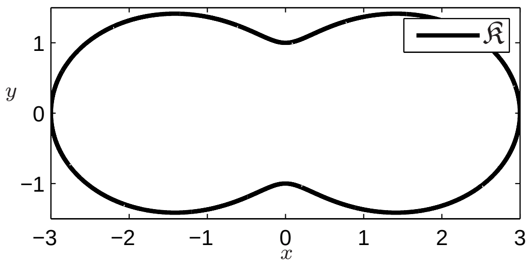
c) Ist $\vec{f}$ konservativ? (Das heißt existiert ein $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{f} = \nabla F$?)

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Berechnen Sie den Inhalt der von der folgenden Kurve eingeschlossenen Fläche:

$$\mathfrak{K} : \vec{x}(\phi) = \begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\phi)\, \cos\phi \\ r(\phi)\, \sin\phi \end{pmatrix}$$

mit $\quad r(\phi) = 2 + \cos(2\phi)\,, \quad \phi \in [0, 2\pi)\,.$



HINWEIS: Polarkoordinaten sind hilfreich, und Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, \mathrm{d}\phi = \pi$ verwenden.

Aufgabe 9 (4+2+2+4 = 12 Punkte)

Sei $\vec{x} : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{x}(\eta, \phi) = \begin{pmatrix} \cosh\eta\, \cos\phi \\ \sinh\eta\, \sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y : \text{ kartesisch})\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}$ für alle (η, ϕ) mit $\eta \neq 0$ lokal invertierbar ist – dadurch also krummlinige Koordinaten definiert werden.

b) Sind diese Koordinaten orthogonal?

c) Wie lautet das Flächenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ in diesen Koordinaten?

d) Sei $\widetilde{K} := \{(\eta, \phi) \,|\, 0 \leq \eta \leq C\}$ mit $C > 0$ fest, und $K = \vec{x}(\widetilde{K})$. Berechnen Sie den Flächeninhalt $|K|$.

HINWEIS: Es gilt $\sinh(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$, und sie dürfen $\int_0^{2\pi} \sin^2\phi = \pi$ verwenden.

Aufgabe 10 (5+3 = 8 Punkte)

Die $k$te von n Urnen enthält k schwarze und $n - k$ weiße Kugeln. Eine der Urnen wird zufällig ausgewählt und eine Kugel daraus gezogen (jede Urne und jede Kugel darin mit gleicher Wahrscheinlichkeit). Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$$A_k : = \text{“Die } k\text{te Urne wird ausgewählt”}$$
$$S : = \text{“Es wird eine schwarze Kugel gezogen”}$$

a) Geben Sie $P(A_k)$ und $P(S|A_k)$ an, und berechnen Sie $P(S)$.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die $k$te Urne ausgewählt wurde, wenn eine schwarze Kugel gezogen wurde?