G. Fels
Universität Tübingen

Sommersemester 2010

Mathematik für Physiker IV
Übungsblatt 5

Aufgabe 14:

a) Gilt $f, g \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$ so zeigen Sie, dass $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$. Unter Verwendung der Hölderischen Ungleichung beweisen Sie ferner die Minkowski Ungleichung $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

b) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{N} \subset 2^X$ die Menge aller μ-Nullmengen. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ eine σ-Algebra ist und erweitern Sie μ zu einem Mass $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$, so dass $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ vollständig ist.

[6]

Aufgabe 15: Gegenbeispiele

In dieser Aufgabe sollen Sie Beispiele finden, die die Notwendigkeit der dominierenden Funktion im Satz von der majorisierten Konvergenz illustrieren.

Finden Sie dazu jeweils einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, eine Folge messbarer und integrierbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ und eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, so dass $f_n \to f$ punktweise konvergiert,

a) aber f nicht integrierbar ist;

b) zwar $\|f_n\|_{L^1} \leq C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gilt (und somit nach Fatou f integrierbar ist), aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \neq \int_X f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

[6]

Aufgabe 16: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)/x$, defieinert auf $[0, \infty)$.

a) Berechnen Sie, falls möglich, das uneigentliche Riemannsche Integral $\int_0^\infty f(x)\, dx$ [2]

b) Ist f L-integrierbar? Berechnen Sie, falls möglich, das entsprechene Lebesguesche Integral (mit dem Maßraum $([0, \infty), \mathcal{B}_{[0,\infty)}, \lambda)$) [3]

$\mathbf{\Sigma}$ =17

Abgabe: Montag, 17.05.2010, zu Beginn der Vorlesung.