G. Fels
Universität Tübingen

Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 9

Aufgabe 26: Zeigen Sie, dass auf der topologischen Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}$ die folgenden beiden Abbildungen zwei Karten definieren:

$$\varphi_1 : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x, \qquad \varphi_2 : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3.$$

Diese Karten definieren wiederum auf M zwei differenzierbare Atlanten, $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Zeigen Sie ferner:

a) Die identische Abbildung $\mathrm{Id} : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2)$ ist <u>kein</u> Diffeomorphismus zwischen den beiden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Insbesonder definieren die beiden Atlanten verschiedene (d.h. nicht kompatible) differenzierbare Strukturen auf M.

b) Die Abbildung $g : (M, \mathcal{A}_1) \to (M, \mathcal{A}_2)$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist ein differenzierbarer Diffeomorphismus.

c) Zeigen Sie, dass es keinen Diffeomorphismus zwischen der Mannigfaltigkeit S^k und einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ geben kann.

[8]

Aufgabe 27:

a) Es sei $f : U_{\mathbb{R}^n} \to U_{\mathbb{R}^m}$ eine Submersion. Zeigen Sie, dass dann f eine offene Abbildung ist, d.h., das Bild jeder offenen Teilmenge wieder offen ist.

b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es seien M, N, P differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \to N$ eine surjektive Submersion. Es sei weiter $F : N \to P$ irgendeine Abbildung. Dann ist F (C^k-)differenzierbar genau dann wenn $F \circ \pi$ (C^k-)differenzierbar ist.

[8]

Aufgabe 28:

a) Es sei $\pi : S^k \to \mathbb{RP}^k$ die Abbildung $x \mapsto [x]$. Zeigen Sie, dass π ein lokaler Diffeomorphismus zwischen den Mannigfaltigkeiten S^k und $\mathbb{RP}^k$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $S^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ eine injektive Immersion $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ induziert, die auch noch einen Homöomorphismus $\mathbb{RP}^2 \to f(\mathbb{RP}^2)$ definiert. (Eine solche Abbildung nennt man eine *reguläre Einbettung*).

[8]

$\mathbf{\Sigma} = 24$

Abgabe: Montag, 21.06.2010, zu <u>Beginn</u> der Vorlesung.