G. Fels
Universität Tübingen

Sommersemester 2010

Mathematik für Physiker IV
Übungsblatt 10

Aufgabe 29: Konstruieren Sie eine der Überdeckung $U_1 = B_2(1,0)$ und $U_2 = B_2(-1,0)$ von $M := U_1 \cup U_2 \subset \mathbb{R}^2$ unterlegene differenzierbare Zerlegung der 1, indem Sie

a) eine C^∞ Funktion $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\chi((\infty, 0]) = 0$ sowie $\chi(0,\infty) > 0$ konstruieren;
Hinweis: Betrachten Sie z.B. $\chi(x) = e^{-1/x}$ für $x > 0$

b) für jedes Paar $0 < r < R$ mit Hilfe von χ eine glatte (d.h., eine C^∞) Funktion $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $\psi([R,\infty)) = 0$ und $\psi((-\infty, r]) = 1$ konstruieren.
Hinweis: $\chi(R-x)/(\chi(R-x) + \chi(x-r))$

c) für jedes Paar $0 < r < R$ die C^∞-Funktionen $\eta_{r,R}$, $\theta_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konstruieren, so dass
- $\theta_r(B_r(0)) > 0$, $\theta_r(\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)) = 0$
- $\eta_{r,R}(\mathbb{R}^n) \subset [0,1]$, $\eta_{r,R}(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)) = 0$, $\eta_{r,R}(B_r(0)) = 1$.

d) Schließlich konstruieren Sie glatte Funktionen $\alpha_j : U_j \to [0,1]$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 1$ und $\mathrm{supp}\alpha_j \subset U_j$, $j = 1,2$
Hinweis: Benutzen Sie die Funktionen $\theta_r(x-p)$ aus (c) und den Trick aus (b).

[10]

Aufgabe 30:

a) Zeigen Sie: Sind M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist $M \times N$ ebenfalls eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. (D.h, überprüfen Sie die Bedingungen aus Def 5.1.3 und konstruieren Sie dann einen differenzierbaren Atlas auf $M \times N$)

b) Zeigen Sie, dass
$$E := \{(x,\ell) \in \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{KP}^n) : x \in \ell\}$$
eine Untermannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit $\mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{KP}^n$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $\pi : E \to \mathbb{KP}^n$ der Projektion $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{KP}^n \to \mathbb{KP}^n$, $(x,\ell) \mapsto \ell$ eine Vektorraumbündelstruktur auf E definiert, wobei E der Totalraum und $\mathbb{KP}^n$ die Basis dieses Vektorraumbündels ist.

[8]

Aufgabe 31: Berechnen Sie für $K = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand $M = \partial K$ und Vektorfelder w_j jeweils das äußere Einheits-Normalenfeld ν und das Flussintegral $\int_{\partial K} \langle w_j, \nu \rangle dM$.
- $w_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $w_1(x_1,x_2) = (1,0)$
- $w_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $w_2(x_1,x_2) = (-x_2, x_1)$
- $w_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $w_3(x_1,x_2) = f(\|x\|)x$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar

[6]

Σ =24

Abgabe: Montag, 28.06.2010, zu Beginn der Vorlesung.