G. Fels
Universität Tübingen

Sommersemester 2010

Mathematik für Physiker IV
Übungsblatt 11

Aufgabe 32:*
Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $w_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ eine Punktderivation. Zeigen Sie direkt unter Verwendung der Definition 5.2.3, dass eine Punktderivation lokal ist, d.h.:
Sind $f, g \in C^\infty(M)$ zwei Funktionen, die in einer (kleinen) Umgebung $W(p) \subset M$ übereinstimmen, so folgt $w_p(f) = w_p(g)$ für jede Punktderivation w_p in $p \in M$

[8]*

Aufgabe 33:

a) Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, TM das Tangentialbündel sowie T^*M das Kotangentialbündel. Jede Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ auf M liefert auf U_α lokale Koordinatenfunktionen, die wiederum die lokalen Bündelkarten $TU \overset{\psi_\alpha}{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ sowie $T^*U \overset{\psi_\alpha^*}{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ definieren. Beschreiben Sie, wie sich die Bündelkartenwechsel $(p, v) \mapsto (p, g_{\beta\alpha}(p)(v))$ in den beiden Fällen (Tangential- und Kotangentialbündel) unterscheiden.

b) Berechnen Sie die beiden Bündelkartenwechsel in dem konkretem Fall der Einheitssphäre $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, die durch die zwei Karten $\varphi_N : S^{n-1} \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi_S : S^{n-1} \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ überdeckt wird, wobei $N = (0, \ldots 0, 1) \in S^{n-1}$ den Nordpol und $S = (0, \ldots 0, -1) \in S^{n-1}$ den Südpol bezeichnet, und φ_α die jeweiligen stereographischen Projektionen auf die äquatoriale Ebene $\mathbb{R}^{n-1}$ sind.

[8]

Aufgabe 34:

Durch $\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\psi(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)^t$ sind Polarkoordinaten gegeben. Drücken Sie die Koordinaten-1-Formen dr und $d\phi$ durch dx und dy und ebenso die Koordinatenvektorfelder $\partial/\partial r$ und $\partial/\partial\phi$ durch $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ aus. [4]

Aufgabe 35:

Sei auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die 1-Form ω gegeben durch

$$\omega(x, y) = \frac{-y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} + \frac{x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}.$$

Integrieren Sie ω einmal entlang des Quadrats, dass durch die Eckpunkte (-1,-1), (1,-1), (1,1) und (-1,1) gegeben ist. Integrieren Sie ω anschließend entlang des positiv orientierten Einheitskreis, indem Sie ω in Polarkoordinaten darstellen. [4]

$\mathbf{\Sigma} = 16$

Abgabe: Montag, 5.07.2010, zu Beginn der Vorlesung.