

Mathematik für Physiker III & IV

Vorlesungszusammenfassung

VERSION VOM 2 AUGUST 2010

1. Differentialrechnung

1.1. Metrische und normierte Räume

In dieser Vorlesung bezeichnet \mathbb{K} entweder \mathbb{R} (Körper der reellen Zahlen) oder $\mathbb{C} = \{u + iv : u, v \in \mathbb{R}\}$ (Körper der komplexen Zahlen). Wir schreiben weiter $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, \mathbb{Z} für den Ring der ganzen Zahlen, \mathbb{Q} für den Körper der rationalen Zahlen. Ferner: $\mathbb{R}_{\geq a} = [a, \infty)$. Um die Begriffe "Abstand", "Konvergenz", "Umgebung", "Stetigkeit" etc., die man aus der Theorie der reellen Zahlen kennt, auch auf andere Mengen zu verallgemeinern, beginnen wir mit den folgenden fundamentalen Definitionen.

Definition 1.1.1. (Metrischer Raum) Es sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik* oder eine *Abstandsfunktion* falls für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0. \iff x = y$$

$$(M2) \quad (\text{Symmetrie}) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

Eine Menge X zusammen mit einer Metrik d nennt man einen *metrischen Raum*.

Definition 1.1.2. (Normierter Raum) Es sei V ein \mathbb{K} Vektorraum. Eine Abbildung $\nu : V \rightarrow [0, \infty)$ nennt man ein *Norm*, falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(N1) \quad \nu(x) = 0 \iff x = 0$$

$$(N2) \quad \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x)$$

$$(N3) \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad \nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$$

Man schreibt oft $\|x\|$ statt $\nu(x)$. Ein Vektorraum zusammen mit einer Norm, $(V, \|\cdot\|)$, nennt man einen *normierten Vektorraum*. Gilt statt N1 bloß $\nu(0) = 0$, so nennt man eine solche Abbildung eine *Halbnorm* auf V .

Aus den Normaxiomen folgt die sog. umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in V \quad |\nu(x) - \nu(y)| \geq \nu(x - y)$$

Definition 1.1.3. (Skalarprodukt) Es sei V ein \mathbb{K} Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $h : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(H1) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, h ist \mathbb{R} -bilinear und symmetrisch,

oder,

(H1*) falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, h ist hermitesch, d.h., für alle $x_j, y_j \in V$, $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C}$ gilt:

$$h(\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2) = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 h(x_1, x_2) + \bar{\lambda}_1 \mu_2 h(x_1, y_2) + \bar{\mu}_1 \lambda_2 h(y_1, x_2) + \bar{\mu}_1 \mu_2 h(y_1, y_2)$$
$$h(x_1, x_2) = \overline{h(x_2, x_1)}$$

(H2) (positive Definitheit) Für alle $x \in V$ gilt $h(x, x) \geq 0$

(H3) (keine Entartung) $h(x, x) = 0 \iff x = 0$

Man schreibt oft $\langle x, y \rangle$ statt $h(x, y)$.

Bemerkungen.

- Ein Skalarprodukt auf V definiert auf V eine Norm durch $\|v\| := \|v\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
- Eine Norm auf V definiert durch die Vorschrift $d(v, w) := d_{\|\cdot\|}(v, w) := \|v - w\|$ eine Metrik auf V .
- Es gibt Normen auf Vektorräumen, die von keinem Skalarprodukt induziert werden können und es gibt Metriken auf V die von keiner Norm $\|\cdot\|$ herkommen.

Für Vektorräume mit einem Skalarprodukt gilt die

1.1.4. Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\forall v, w \in V \quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

wobei die Ungleichung strikt ist wenn v und w linear unabhängig sind.

Beispiele 1.1.5. Es sei $N := \{1, \dots, n\}$ oder $N = \mathbb{N}$. (Beweise für (b) – (d): Übungsaufgaben)

(a) Es sei X eine beliebige Menge. Dann ist $d_{\delta}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$ die sog. *diskrete Metrik* auf X .

(b) Für jedes $p \in (0, \infty)$ die Menge der N -Tupeln (äquivalent, die Menge der Abbildungen $N \rightarrow \mathbb{K}$)

$$\ell^p(N) := \{(x(k))_{k \in N} : \sum_{k \in N} |x(k)|^p < \infty\},$$

versehen mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation, ein \mathbb{K} -Vektorraum. Für $p \in [1, \infty)$ macht $\|(x(k))\|_p := (\sum_{k \in N} |x(k)|^p)^{1/p}$ aus $\ell^p(N)$ einen normierten Raum.

(c) Auf dem \mathbb{K} -Vektorraum $C^0([0, 1])$ der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ ist durch

$$\|f\|_{\infty} := \|f\|_{[0, 1]} := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

eine Norm erklärt: die sog. *Supremumsnorm*. Analoge Konstruktion macht man auch für $\ell^{\infty}(N) := \{(x(j)) : \sup_{j \in N} |x(j)| < \infty\}$.

(d) Speziell für $p = 2$ ist $\langle (x(k)), (y(k)) \rangle := \sum_{k \in N} \overline{x(k)} y(k)$ ein Skalarprodukt auf $\ell^2(N)$.

Falls $N = \{1, \dots, n\}$ so ist $(\ell^2(N), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der wohlbekanntere Vektorraum \mathbb{K}^n , versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{x_1} y_1 + \dots + \overline{x_n} y_n$. Wir schreiben d_e für die induzierte euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n .

(e) Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes, zusammen mit der eingeschränkten Abstandsfunktion $d : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$, ist ein metrischer Raum. Wir nennen ein solches Paar $(Y, d|_Y)$ einen Teilraum von (X, d) . Auch das endliche kartesische Produkt $X_1 \times \dots \times X_n$ von metrischen Räumen kann mit einer metrischen Struktur versehen werden, z.B., sind

$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_j d_j(x_j, y_j) \quad \text{oder} \quad \tilde{D}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_j \{d_j(x_j, y_j)\}$$

Metriken auf $X_1 \times \dots \times X_n$ (die topologisch äquivalent im Sinne von 1.2.6(c) sind).

(f) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $\underline{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ ebenfalls eine Metrik auf X . Die Topologien (siehe Bemerkungen bevor 1.2.3) erzeugt durch d und \underline{d} sind gleich. \underline{d} ist jedoch beschränkt auf ganz X .

1.2. Offene und abgeschlossene Mengen, Konvergenz und Stetigkeit

Die offenen Intervalle in \mathbb{R} sowie deren beliebige Vereinigungen waren von fundamentale Bedeutung für die Analysis auf \mathbb{R} . Analoge Begriffe lassen sich auch für beliebige metrische Räume definieren.

Definition 1.2.1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine (offene) metrische Kugel um $x \in X$ mit Radius $r > 0$ ist die Teilmenge

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

(b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine *Umgebung* des Punktes $x \in X$ falls eine Kugel mit positiven Radius r existiert, so dass $B_r(x) \subset U$ gilt.

(c) Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *offen* falls sie eine Umgebung aller in W enthaltenen Punkte ist. Insbesondere ist die leere Menge \emptyset eine offene Teilmenge in (X, d) .

(d) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* falls deren Komplement $A^c := X \setminus A$ offen ist.

Theorem 1.2.2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

i Jede Kugel $B_r(x) \subset X$ ist eine offenen Teilmenge.

ii Jede offenen Teilmenge $W \subset X$ ist eine Vereinigung von Kugeln: $W = \bigcup_{j \in J} B_{r_j}(x_j)$.

iii Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. Endliche Durchschnitts offener Mengen sind offen.

iv Beliebige Durchschnitts abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Bemerkungen.

- Jeder metrische Raum ist *hausdorff*, d.h., für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ gibt es Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

- Jede offene Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes läßt sich als eine (i.A. unendliche) Vereinigung von Kugeln mit verschiedenen Radii und Mittelpunkten darstellen: $U = \bigcup_j B_{r_j}(x_j)$.

- Die Menge diejenigen Teilmengen von X , die offen sind, bilden die sog. *topologische Struktur* oder *Topologie* auf X . Diese Menge kann als eine Teilmenge \mathcal{T} der Potenzmenge 2^X (d.h. die Menge aller Teilmengen von X) betrachtet werden. Ohne den Umweg über metrische Räume definieren Mathematiker den Begriff der Topologie in die folgende Art und Weise: Eine Topologie \mathcal{T} auf einer Menge X ist eine ausgezeichnete Teilmenge $\mathcal{T} \subset 2^X$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(T2) Beliebige Vereinigungen $\bigcup_j U_j$ von Elementen U_j aus \mathcal{T} liegen wieder in \mathcal{T} .

(T2) Endliche Durchschnitts $\bigcap_j U_j$ von Elementen U_j aus \mathcal{T} liegen wieder in \mathcal{T} .

Eine Menge X zusammen mit der Menge \mathcal{T} von Teilmengen von X , die die Bedingungen (T1) – (T3) erfüllt, nennt man einen *topologischen Raum*. Man bezeichnen die Elemente aus $\mathcal{T} \subset 2^X$ als die offenen Teilmengen in X . Ausgehend von \mathcal{T} lassen sich die Begriffe “offen” (per definitionem), “abgeschlossen”, “Häufungspunkt”, “Rand”, “Konvergenz”, “Stetigkeit” etc. (siehe unten) ebenfalls problemlos definieren. Die so erhaltenen Klasse von beliebigen topologischen Räumen ist wesentlich größer als die metrischen Räume (X, d) , deren Topologien wie in 1.2.1 konstruiert wurde. In dieser Vorlesung werden wir auf diesen allgemeineren Standpunkt aber weitgehend verzichten und uns hauptsächlich mit den metrischen Räumen beschäftigen. Die von einer Metrik d auf X induzierte Topologie, d.h., die Menge \mathcal{T} aller offenen Teilmengen von X , bezeichnen wir als eine *metrische Topologie*.

- Jeder Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist selbst ein metrischer Raum. Genauso ist jede Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes (X, \mathcal{T}_X) selbst ein topologischer Raum mit der sog *Relativtopologie* $\mathcal{T}_A := \{U \cap A : U \in \mathcal{T}_X\}$.

Definition 1.2.3. Es sei $C \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes.

- (a) Einen *Häufungspunkt* von C nennt man jeden Punkt $y \in X$, für den gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(y) \cap X \text{ enthält Punkte aus } C \setminus \{y\}.$$

- (b) Einen *Randpunkt* von C nennt man jeden Punkt $y \in X$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Kugel $B_\varepsilon(y)$ sowohl Punkte aus C als auch Punkte aus $X \setminus C$ enthält.

Man bezeichne mit $\text{Hp}(C)$ die Menge aller Häufungspunkte und mit ∂C die Menge aller Randpunkte von C .

- (c) Der Abschluss \overline{M} von $M \subset X$ ist definitionsgemäß die Menge $\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \supset M \\ A \text{ abg}}} A$

Gilt für eine Teilmenge $M \subset X$ $\overline{M} = X$ so heißt M *dicht* in X . **Beispiel:** $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

- (d) Jeder Punkt $x \in C$, für den C eine Umgebung ist, nennt man einen *inneren Punkt* von C . Die Menge aller inneren Punkte von C , das sog. *Innere*, oder der *offene Kern* von C , bezeichnet man mit $\text{int}(C)$ (oder C°)

Lemma 1.2.4. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt*

i $\overline{M} = M \cup \text{Hp}(M) = M \cup \partial(M)$.

ii M is *offen* $\iff M = \text{int}(M) \iff M \cap \partial M = \emptyset$

iii $\partial M = \overline{M} \setminus \text{int}(M)$

Definition 1.2.5. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (a) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus X *konvergiert gegen* $y \in X$ falls für jede Umgebung $U(y)$ von y ein $N = N_U \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U(y)$ für alle $n \geq N_U$. Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ oder einfach nur $x_n \rightarrow y$.

Äquivalent umformuliert: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass $d(x_n, y) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.

Konvergiert eine Folge (x_n) (aus X) nicht gegen einen Grenzwert (in X), so sagt man, dass sie *divergent* (in X) ist.

- (b) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus X heißt eine *Cauchy-Folge* falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.

Eine Cauchy-Folge in (X, d) muss nicht konvergieren. Z.B. ist in (\mathbb{Q}, d_e) die rekursiv definierte Folge $x_{m+1} := x_m/2 + 1/x_m$ mit $x_1 = 1$ eine Cauchy-Folge ohne einen Grenzwert (in \mathbb{Q}).

- (c) Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* falls jede Cauchy-Folge (x_n) aus X gegen ein Element aus X konvergiert. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$, der bzgl. der induzierten Abstandsfunktion $d_{\|\cdot\|}$ vollständig ist, heißt ein *Banachraum*. Ein Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt, der vollständig bzgl. der induzierten Metrik $d_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ ist, heißt ein *Hilbertraum*.

Aus der Vorlesung in dem ersten Semester sollte bekannt sein, dass \mathbb{R} und \mathbb{C} , versehen mit der euklidischen Metrik $d(x, y) := |x - y|$, vollständig sind.

Eine divergente Folge (x_n) aus X kann konvergente Teilfolgen (x_{n_k}) besitzen: Z.B. ist die Folge $(x_n) := ((-1)^n, i^n)$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ divergent, aber die Teilfolgen (x_{1+4k}) , (x_{2+4k}) , (x_{3+4k}) und (x_{4k}) konvergieren (als konstante Folgen) in \mathbb{C}^2 .

In einem metrischen Raum (X, d) kann von jeder Teilmenge $M \subset X$ der Durchmesser ermittelt werden:

$$\text{diam}(M) := \sup_{x, y \in M} d(x, y) \in [0, +\infty]$$

Man sagt, dass M bzgl. d *beschränkt* ist, falls $\text{diam}(M) < \infty$ gilt.

Definition 1.2.6. (Stetigkeit) Es seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume.

- (a) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt (folgen)stetig in $x \in X$ falls für jede Folge (x_n) aus X mit $\lim x_n = x$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt (global) stetig falls sie stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist. Für die Menge aller stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ schreiben wir $C^0(X, Y)$.

Besonders wichtig sind die Abbildungen, die die topologische Struktur von metrischen Räume isomorph erhalten:

- (b) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt ein *Homöomorphismus*, falls f stetig, bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist.
- (c) Es seien d_1 und d_2 zwei Abstandsfunktionen auf der Menge X . Man sagt, dass (X, d_1) *feiner* als (X, d_2) ist falls die identische Abbildung $\text{Id} : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ stetig ist. So z.B. ist \mathbb{R} , versehen mit der diskreten Metrik d_δ aus 1.1.5(a), feiner als \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik d_e . Umgekehrt ist jedoch die identische Abbildung $\text{Id} : (\mathbb{R}, d_e) \rightarrow (\mathbb{R}, d_\delta)$ nicht stetig. Ist die identische Abbildung $\text{Id} : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ eine Homöomorphismus, so sagt man, dass die beiden Metriken d_1 und d_2 *topologisch äquivalent* sind.

Lemma 1.2.7. (Eindeutigkeit des Grenzwertes) Sind y_1 und y_2 zwei Grenzwerte einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) , so gilt $y_1 = y_2$.

Beweis: Es sei $\lim x_n = y_1$ und $\lim x_n = y_2$. Angenommen $y_2 \neq y_1$, d.h., $\varepsilon := d(y_1, y_2) > 0$. Dann sind $B_{\varepsilon/2}(y_1)$ und $B_{\varepsilon/2}(y_2)$ zwei disjunkte Umgebungen. Da aber wegen $\lim x_n = y_1$ bis auf endliche viele Ausnahmen $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y_1)$, so können höchstens endlich viele Folgenglieder x_k in $B_{\varepsilon/2}(y_2)$ liegen. Dann aber kann y_2 kein Grenzwert von (x_n) sein, was den Widerspruch zu unseren Annahme liefert. \square

Lemma 1.2.8. (Stetigkeit und offene Teilmengen) Eine Abbildung $f : (X, d) \rightarrow (Y, d_Y)$ ist genau dann stetig, falls das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Teilmenge $V \subset Y$ offen in X ist.

Beweis: “ \Rightarrow ” Es sei f folgenstetig. Angenommen, es gäbe eine offene Teilmenge $V \subset Y$, so dass $f^{-1}(V)$ nicht offen ist. Dann gibt es einen Randpunkt $x \in f^{-1}(V)$. Insbesondere gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in B_{1/n}(x) \setminus f^{-1}(V)$. Dann aber $\lim y_n = x$ in X und wegen der Stetigkeit von f auch $\lim f(y_n) = f(x) \in V$. Da jedoch n.V. V offen ist gilt es $f(y_n) \in V$ für alle $n \geq N$ für einen endlichen Index N . Für solche n -s gelte aber $y_n \in f^{-1}(V)$ im Widerspruch zu Konstruktion der Folge y_n .

“ \Leftarrow ” Für jede offenen Teilmenge $V \subset Y$ sei jetzt $f^{-1}(V)$ offen und $x \in X$ ein beliebiges Element. Wir zeigen, dass f in x (folgen)stetig ist. Da insbesondere für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ das Urbild von $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist, enthält $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ eine offene Kugel $B_\delta(x)$ für ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$. Für jede Folge (x_n) aus X mit $\lim x_n = x$ gibt es dann ein N mit $x_n \in B_\delta(x)$ für alle $n \geq N$. Wegen $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ folgt dann $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgern wir, dass $\lim f(x_n) = f(x)$ was zu zeigen war. \square

Bemerkung. Um die Stetigkeit einer Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ zu zeigen, reicht es nachzuweisen, dass das Urbild jeder offenen Kugel, $f^{-1}(B_{r_j}(y_j))$, offen in X ist.

Definition 1.2.9. (Konvergenzmodi für Funktionenfolgen) Es sei $f_n : X \rightarrow Y$ eine Folge von Abbildungen zwischen zwei metrischen Räumen und $g : X \rightarrow Y$ eine weitere Abbildung.

- (a) (f_n) konvergiert *punktweise* gegen g wenn für jedes $x \in X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ gilt.
- (b) (f_n) konvergiert (global) *gleichmäßig* gegen g wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d_Y(f_n(x), g(x)) < \varepsilon$ simultan für alle $x \in X$ gilt.

- (c) (f_n) konvergiert *lokal gleichmäßig* gegen g wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U(x) \subset X$ mit der folgenden Eigenschaft existiert: Die Einschränkungen $f_n|_{U(x)}$ konvergieren gleichmäßig gegen $g|_{U(x)}$.

Lemma 1.2.10. *Es seien X, Y zwei metrische Räume.*

- i *Ist $g : X \rightarrow Y$ der lokal gleichmäßige Grenzwert einer Folge $f_n : X \rightarrow Y$ von stetigen Funktionen, so ist g ebenfalls stetig.*
- ii *“ $f_n \rightarrow g$ konvergiert gleichmäßig” \implies “ $f_n \rightarrow g$ konvergiert lokal gleichmäßig” \implies “ $f_n \rightarrow g$ konvergiert punktweise”. Die Umkehrungen dieser Implikationen sind i.A. falsch.*

Beispiel 1.2.11. Es sei $B(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y : \text{stetig } \sup_{x, y \in X} d_Y(f(x), f(y)) < \infty\}$ die Menge der beschränkten stetigen Abbildungen zwischen den metrischen Räumen X und Y . Dann ist

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

eine Metrik auf $B(X, Y)$. Die Konvergenz $f_n \rightarrow f$ bzgl. der Metrik d ist genau die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f . Ist (Y, d_Y) vollständig, so ist auch $(B(X, Y), d)$ vollständig.

Definition 1.2.12. Es seien X, Y zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig* falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt. Eine Teilmenge von Abbildungen $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ heisst *gleichgradig stetig* in $x \in X$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(x)$ von x existiert mit $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in U(x)$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt.

1.3. Kompaktheit

Definition 1.3.1. (Kompaktheit) Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

- (a) Eine *offene Überdeckung* einer Teilmenge $M \subset X$ besteht aus einer Menge offener Teilmengen $\mathcal{U} = \{U_j : U_j \subset X \text{ offen}\}$, so dass $M \subset \bigcup_j U_j$ gilt.
- (b) Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt (überdeckungs)kompakt falls aus jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_j\}$ von K sich eine endliche Teilüberdeckung auswählen läßt, d.h., es existieren endlich viele offene Teilmengen U_{j_1}, \dots, U_{j_m} in der Überdeckung \mathcal{U} , so dass $K \subset U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}$ gilt.
- (c) Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge (x_n) aus K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

Endliche Mengen in einem beliebigen metrischen Raum, abgeschlossene und beschränkte Intervalle in \mathbb{R} , sowie deren Produkte: $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset (\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Beispiele kompakter Teilmengen.

Bemerkungen. Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen. Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt. Eine Teilmenge A eines kompakten metrischen Raumes, die vollständig bzgl. der induzierten Metrik $d|_A$ ist, ist kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.

Theorem 1.3.2.

- i *Eine kompakte Menge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt. Die Umkehrung ist für allgemeine metrische Räume in der Regel falsch (siehe Übungsaufgabe 4). Sie gilt jedoch in dem Spezialfall von Teilmengen in (\mathbb{R}^n, d_e) (Satz von Heine-Borel).*
- ii *In einem metrischen Raum X ist eine Teilmenge $K \subset X$ genau dann kompakt wenn sie folgenkompakt ist.*

iii Das (endliche) Produkt $K_1 \times \cdots \times K_\ell$ von kompakten Teilmenge $K_j \subset X_j$, $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $X_1 \times \cdots \times X_\ell$.

Bemerkung. Das Produkt $X_1 \times \cdots \times X_\ell$ in der obigen Aussage iii trägt die sog. Produkttopologie, d.h., eine Teilmenge $V \subset X_1 \times \cdots \times X_\ell$ ist genau dann offen, falls $V = \bigcup_j U_{j_1} \times \cdots \times U_{j_\ell}$ wobei für alle j_k $U_{j_k} \subset X_k$ offene Teilmengen sind. Die so definierten offenen Teilmengen in $X_1 \times \cdots \times X_\ell$ sind z.B. auch von der Metrik $d((x_1, \dots, x_\ell), (y_1, \dots, y_\ell)) := \max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_\ell(x_\ell, y_\ell)\}$ induziert (wie in Def. 1.2.1). D.h., die Produkttopologie von endlichen kartesischen Produkten von metrischen Räumen ist eine metrische Topologie.

Definition 1.3.3. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ nennt man

- *abstandserhaltend*, falls für alle $x, y \in X$ $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ gilt,
- eine *Isometrie*, falls sie eine bijektive abstandserhaltende Abbildung ist,
- eine *Kontraktion*, falls für alle $x, y \in X$ $d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_X(x, y)$ mit $c \in [0, 1)$ gilt.

Eine abstandserhaltende Abbildung oder eine Kontraktion ist automatisch stetig.

Banachscher Fixpunktsatz 1.3.4. Es sei $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ eine Kontraktion. Ist (X, d) vollständig, so gibt es genau einen Fixpunkt $x \in X$ von f , d.h., $f(x) = x$.

Für den späteren Gebrauch führen wir noch den folgende Begriff ein:

Definition 1.3.5. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. U heißt *relativkompakt* in X falls der Abschluss \overline{U} eine kompakte Teilmenge von X ist.

Beispiele: $B_1(0)$ ist relativkompakt in $B_2(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dagegen ist $B_1(1)$ nicht relativkompakt in $B_2(0)$: Der Abschluss $\overline{B_1(1)}$ ist zwar kompakt in \mathbb{R}^n , nicht jedoch in $B_2(0)$.

Definition 1.3.6. (Zusammenhang) Eine Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen (oder topologischen) Raumes X heißt

- zusammenhängend* falls für jedes Paar von offenen Teilmengen U_1, U_2 mit $M \subset U_1 \cup U_2$ und $M \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ entweder $M \cap U_1 = \emptyset$ oder $M \cap U_2 = \emptyset$;
- wegzusammenhängend* falls für je zwei Punkte $x, y \in M$ es einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.
- Ist X ein metrischer (oder bloß topologischer) Raum, so ist die Relation

$$x \sim_Z y \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists \text{ zshg. Teilmenge } A \subset X \text{ mit } x, y \in A$$

eine Äquivalenzrelation. Eine Äquivalenzklasse bzgl. dieser Relation nennt man eine *Zusammenhangskomponente* von X . X ist eine disjunkte Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten. In einem Banachraum (z.B. \mathbb{R}^n) ist eine Zusammenhangskomponente U° einer offenen Menge U ebenfalls offen.

Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend, aber die Umkehrung gilt i.A. nicht. Offene zusammenhängende Teilmengen in \mathbb{K}^n sind wegzusammenhängend. Intervalle in \mathbb{R} sind zusammenhängend.

Zwischenwertsatz 1.3.7. Ist X zusammenhängend und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so wird jeder Wert z , der zwischen zwei Werten $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegt, in irgendeinem Punkt von X angenommen.

1.4. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Vorbemerkungen. Es seien $(E, \|\cdot\|)$, $(E', \|\cdot\|')$ normierte Vektorräume oder sogar Banachräume, d.h., normierte und vollständige Vektorräume (z.B., \mathbb{K}^n , ℓ^2 , $C^0(I, \mathbb{K}^n)$ etc.). Wir schreiben U_E für eine offene Teilmenge in dem normierten Vektorraum E .

Eine Abbildung $A : E \rightarrow E'$ heißt *linear* falls für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v, w \in E$ $A(\lambda v + \mu w) = \lambda A(v) + \mu A(w)$ gilt. Falls $\dim E = \infty$, so braucht A nicht stetig zu sein. In dem Fall $E = \mathbb{K}^n$, $E' = \mathbb{K}^m$ ist jede lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ durch eine matrix $M_A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n}$ beschrieben: $A(x) = M_A \cdot x$.

Lemma 1.4.1. *Es sei $A : E \rightarrow E'$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- i A ist (global) stetig.
- ii A ist stetig in 0
- iii A ist beschränkt, d.h., es existiert $C > 0$ mit $\|A(v)\|' \leq C \cdot \|v\|$ für alle $v \in E$.

Die Menge aller stetigen linearen Homomorphismen von E nach E' , $\mathcal{L}(E, E')$, ist ein normierter Vektorraum mit der Operatornorm

$$(1.4.2) \quad \|\cdot\|_{\text{op}} : \mathcal{L}(E, E') \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \|\Phi\|_{\text{op}} := \sup_{v \neq 0} \frac{\|\Phi(v)\|'}{\|v\|}.$$

Es gilt für ein $\Phi \in (\mathcal{L}(E, E'), \|\cdot\|_{\text{op}})$: $\forall x \in E \quad \|\Phi(x)\|' \leq \|\Phi\|_{\text{op}} \cdot \|x\|$. Unter der Voraussetzung, dass E' vollständig ist, ist auch $\mathcal{L}(E, E')$ vollständig, d.h., ein Banachraum.

Wir reservieren die Bezeichnung $\text{Hom}(E, E')$ für den Vektorraum aller, nicht notwendigerweise stetigen linearen Abbildungen. Z.B. ist die Ableitungsabbildung $: C^\infty([0, 1]) \rightarrow C^\infty([0, 1])$, $f \mapsto f'$ eine \mathbb{R} -lineare aber nicht stetige Abbildung. Hierbei bezeichnet $C^\infty([0, 1])$ den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, für die jede Ableitung $f^{(k)} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung auf $[0, 1]$ besitzt.

Definition 1.4.3. Es seien $(E, \|\cdot\|)$, $(E', \|\cdot\|')$ zwei normierte Vektorräume, $U_E \subset E$ eine offene Teilmenge und $F : U_E \rightarrow E'$ eine Abbildung.

- (a) Wir beginnen mit dem Fall $E = \mathbb{K}^n$. Man sagt, dass F eine partielle Ableitung nach x_k in $p = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ besitzt, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(p) := \partial_k F(p) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y_1, \dots, y_k + h, y_{k+1}, \dots, y_n) - F(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)}{h} \in E'$$

existiert.

- (b) Es sei weiter $v \in E$. F besitzt in $p \in U$ eine *Richtungsableitung in Richtung v* , falls es einen Vektor $a \in E'$ mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p + tv) - F(p)}{t} = a$$

gibt. Wir schreiben dann $D_v F(p)$ für a .

- (c) F heißt (total) *differenzierbar* (oder *Fréchet-differenzierbar*) in $p \in U$ falls es eine stetige lineare Abbildung $A : E \rightarrow E'$ gibt, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(p + h) - F(p) - A(h)\|'}{\|h\|} = 0.$$

Wir schreiben dann DF_p oder $DF(p)$ für ein solches A .

Bemerkungen.

- Sind e_j die kanonischen Basisvektoren in \mathbb{K}^n so und $f : U_{\mathbb{K}^n} \rightarrow \mathbb{K}$ so gilt $\frac{\partial}{\partial x_k} f(p) = D_{e_k} f(p)$
- Eindeutigkeit: Sind $A, B : E \rightarrow E'$ zwei stetige lineare Abbildungen, die der Bedingung in 1.4.3(c) genügen, so gilt $A = B$.
- Die Fréchet Differenzierbarkeit (wie in (c)) läßt sich auch folgendermassen formulieren: Eine stetige lineare Abbildung $A : E \rightarrow E'$ ist das Fréchetdifferential von F in p falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\|F(p+h) - F(p) - A(h)\| \leq \varepsilon \|h\| \quad \forall h \in E \text{ mit } \|h\| \leq \delta$$

- In dem Spezialfall $E = \mathbb{R}$, d.h., $F : (a, b) \rightarrow E'$ ist ein Weg in E' , identifiziert man die lineare Abbildung $DF(p) : \mathbb{R} \rightarrow E'$ mit dem Vektor $w = DF(p)(1) \in E'$, so dass die Ableitungsfunktion von F wieder eine Abbildung $(a, b) \rightarrow E'$ ist. In dem allgemeinen Fall ist die Ableitungsfunktion eine Abbildung $DF : U_E \rightarrow \mathcal{L}(E, E')$. Der Wertebereich von DF (nämlich $\mathcal{L}(E, E')$) unterscheidet sich dann von dem Wertebereich E' von F .

Lemma 1.4.4. *Es seien E, E' normierte Vektorräume und $f : U_E \rightarrow E'$ eine Abbildung.*

- Eine in $p \in U_E \subset E$ total differenzierbare Abbildung F ist stetig in p . (Das ist i.A. falsch wenn bloss alle Richtungsableitungen in p existieren.)*
- Existiert das totale Differential $Df(p)$ von f , so gilt für alle $v \in E$: $Df(p)(v) = D_v f(p)$.
Speziell in dem Fall $E = \mathbb{K}^n$ und $E' = \mathbb{K}^m$ ist das totale Differential von $F = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ durch die Jacobi-Matrix beschrieben:*

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \left(D_{e_1} F(p) \cdots D_{e_n} F(p) \right)$$

Wir bezeichnen die Jacobimatrix von $F : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle p mit $\text{Jac}_p(F)$.

Ableitungsregeln 1.4.5. *Es seien E, E', E'' normierte Vektorräume, $U_E \subset E$ und $U_{E'} \subset E'$ offene Teilmengen und $f_\ell : U_E \rightarrow E'$, $\ell = 1, 2$, $g : U_{E'} \rightarrow E''$ Abbildungen.*

- Sind f_1, f_2 an der Stelle $x \in U_E$ total differenzierbar, so ist auch $\lambda f_1 + \mu f_2$ total differenzierbar ($\lambda, \mu \in \mathbb{K}$) und es gilt $D(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) = \lambda(Df_1)(x) + \mu(Df_2)(x)$.*
- (Kettenregel)** *Gilt für $f := f_1$ die Inklusion $f(U_E) \subset U_{E'}$ und ist darüberhinaus f an der Stelle x und g an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar, so ist $g \circ f : U_E \rightarrow E''$ an der Stelle x differenzierbar und die Kettenregel lautet*

$$D(g \circ f)(x) = Dg_{f(x)} \circ Df(x).$$

- Falls $E = \mathbb{K}$, dann ist $f_1 \cdot f_2 : U_E \rightarrow \mathbb{K}$ und $f_1/f_2 : U_E \setminus \{f_2 = 0\} \rightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar in x falls f_j in x differenzierbar sind, und es gilt*

$$D(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot Df_2(x) + f_2(x) \cdot Df_1(x), \quad D\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_2(x) \cdot Df_1(x) - f_1(x) \cdot Df_2(x)}{(f_2(x))^2}$$

Beweis: (von (ii)). Definitionsgemäß gilt es $f(x+h) = f(x) + Ah + o_f(h)$ und $g(y+k) = g(y) + Bk + o_g(k)$ mit $A := Df_x \in \mathcal{L}(E, E')$ und $B := Dg_{f(x)} \in \mathcal{L}(E', E'')$. Da A stetig ist, gibt es eine Konstante C mit $\|Ah\| \leq C\|h\|$ und $\|Ah + o_f(h)\| \leq (C + \varepsilon)\|h\| =: \tilde{C}\|h\|$, falls h aus einer hinreichend kleiner Umgebung $B_\delta(0)$ gewählt wurde. Daher:

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x) + Ah + o_f(h)) = g \circ f(x) + B(Ah + o_f(h)) + o_g(Ah + o_f(h)) = \\ &= g \circ f(x) + B \circ A(h) + r(h) \quad \text{mit } r(h) = B(o_f(h)) + o_g(Ah + o_f(h)) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(o_f(h))}{\|h\|} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_g(Ah + o_f(h))}{\|h\|} = \\ &= B\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_f(h)}{\|h\|}\right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_g(Ah + o_f(h))}{\|Ah + o_f(h)\|} \underbrace{\frac{\|Ah + o_f(h)\|}{\|h\|}}_{\leq \tilde{c}} = 0 + 0 \quad \square \end{aligned}$$

Mittelwertsatz 1.4.6. *Es seien $f : [a, b] \rightarrow E$ sowie $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Sei ferner $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ eine abzählbare Teilmenge, so dass f und v in allen Punkten aus $[a, b] \setminus D$ differenzierbar sind. Gilt es*

$$\|Df(x)\| \leq v'(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus D$$

so folgt: $\|f(b) - f(a)\| \leq v(b) - v(a)$.

Beweis: Um die Aussage des Satzes zu zeigen, reicht es für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$(\varepsilon) \quad \|f(b) - f(a)\| \leq v(b) - v(a) + \varepsilon(b - a + 2)$$

zu beweisen. Dazu definieren wir die folgende Teilmenge:

$$A := \left\{ z \in [a, b] : \begin{array}{l} \text{für jedes } x \in [a, z] \text{ gilt} \\ \|f(x) - f(a)\| \leq v(x) - v(a) + \varepsilon(x - a + 1) + \varepsilon \sum_{n: d_n < x} 2^{-n} \end{array} \right\}$$

Zunächst ist es bloß klar, dass $a \in A$. Sei $c = \sup A$. Aus Stetigkeitsgründen $c \in A$ und $A = [a, c]$. Wir zeigen nun, dass $c = b$ (d.h., $A = [a, b]$) gelten muss. Angenommen, es gelte $c < b$. Dann erhalten wir einen Widerspruch wie folgt:

Fall 1: $c \in [a, b] \setminus D$. Aus der Definition der Differenzierbarkeit von f und v an der Stelle c folgt dann die Existenz von einem $\delta > 0$, so dass für alle $0 \leq h \leq \delta$ gilt:

$$\begin{aligned} \|f(c+h) - f(c)\| &\leq \|Df(c)\|h + \frac{\varepsilon}{2}h \\ v(c+h) - v(c) &\geq v'(c) - \frac{\varepsilon}{2}h \end{aligned}$$

Da $c \in A$, so folgt aus den obigen zwei Ungleichungen sowie $\|Df(c)\| \leq v'(c)$:

$$\begin{aligned} \|f(c+h) - f(a)\| &\leq \|f(c) - f(a)\| + \|f(c+h) - f(c)\| \leq \\ &\leq v(c) - v(a) + \varepsilon(c - a + 1) + \varepsilon \sum_{n: d_n < c} 2^{-n} + \|Df(c)\|h + \frac{\varepsilon}{2}h \leq \\ &\leq v(c) - v(a) + \varepsilon(c - a + 1) + \varepsilon \sum_{n: d_n < c} 2^{-n} + v(c+h) - v(c) + \varepsilon h \leq \\ &\leq v(c+h) - v(a) + \varepsilon(c+h - a + 1) + \varepsilon \sum_{n: d_n < c+h} 2^{-n} \end{aligned}$$

für alle $h \leq \delta$, d.h., $c+h \in A$, im Widerspruch zu der Definition von c .

Fall 2: $c = d_m \in D$. Dann gibt es wegen Stetigkeit von f und v ein $\delta > 0$, so dass für alle $h \in [0, \delta]$

$$\|f(c+h) - f(c)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}2^{-m} \quad v(c+h) - v(c) \geq -\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$$

und damit, wie zuvor,

$$\begin{aligned} \|f(c+h) - f(a)\| &\leq \|f(c) - f(a)\| + \|f(c+h) - f(c)\| \leq \\ &\leq \nu(c) - \nu(a) + \varepsilon(c-a+1) + \varepsilon \sum_{n: d_n < c} 2^{-n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m} \leq \\ &\leq \nu(c) - \nu(a) + \varepsilon(c-a+1) + \varepsilon \sum_{n: d_n < c} 2^{-n} + \nu(c+h) - \nu(c) + \varepsilon 2^{-m} \leq \\ &\leq \nu(c+h) - \nu(a) + \varepsilon(c+h-a+1) + \varepsilon \sum_{n: d_n < c+h} 2^{-n} \end{aligned}$$

Das hieße aber $c+\delta \in A$ im Widerspruch zu der Maximalität von c . Damit also $A = [a, b]$ und wir haben für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung (ε) bewiesen. \square

Korollar 1.4.7. *Es seien E, E' normierte Vektorräume, $F : U_E \rightarrow E'$ eine stetige Abbildung, die bis auf abzählbar viele Ausnahmepunkte in U_E total differenzierbar ist. Ist die Strecke $p+tv$, $t \in [0, 1]$ in U_E enthalten, so gilt*

$$\|F(p+v) - F(p)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|DF(p+tv)\|_{op} \cdot \|v\|$$

Integralversion des Mittelwertsatzes 1.4.8. *Es sei $f : U_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Liegt die Strecke $p+tv$, $t \in [0, 1]$ ganz in $U_{\mathbb{R}^m}$ so gilt*

$$f(p+v) - f(p) = \left(\int_0^1 Df(p+tv) \right) \cdot v$$

Dabei ist das Integral einer vektorwertigen Abbildung $F : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ koordinatenweise definiert:

$$\int_a^b \begin{pmatrix} F_1(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{pmatrix} dt := \begin{pmatrix} \int_a^b F_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b F_N(t) dt \end{pmatrix}$$

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Abbildung $f : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow E$ heißt C^1 -differenzierbar oder stetig partiell differenzierbar in $p \in U_{\mathbb{R}^n}$ falls alle ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$ existieren in einer Umgebung von p und sind stetig in p . Ist f in jedem Punkt aus $U_{\mathbb{R}^n}$ stetig partiell differenzierbar, so schreiben wir einfach $f \in C^1(U_{\mathbb{R}^n}, E)$.

Da die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ wieder Abbildungen von $U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow E$ sind, so kann man diesen Vorgang iterieren und die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung ℓ definieren:

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{m_\ell} \cdots \partial x_{m_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}} \left(\cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{m_2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{m_1}} \right) \cdots \right) \right) : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow E \quad m_1, \dots, m_\ell \in \{1, \dots, n\}$$

Sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung ℓ von f stetig, so sagt man, dass f C^ℓ -differenzierbar ist, oder man schreibt $f \in C^\ell(U_{\mathbb{R}^n}, E)$. Falls partielle Ableitungen aller Ordnungen von f existieren, so ist f ∞ -mal differenzierbar ($f \in C^\infty(U_{\mathbb{R}^n}, E)$). Falls $E = \mathbb{R}$, so schreiben wir $C^\ell(U_{\mathbb{R}^n})$ statt $C^\ell(U_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R})$.

Die Reihenfolge der partiellen Differentiation hat i.A. einen Einfluss auf das Ergebnis. So z.B., besitzt die stetige Funktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, sowie $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$, jedoch

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0).$$

Schwarzsches Lemma 1.4.9. Es sei $f : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow E$ eine C^k -differenzierbare Abbildung (d.h., alle partiellen Ableitungen der Ordnung k existieren und sind stetig (in p)). Dann sind die Werte der partiellen Ableitungen k -ter Ordnung unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation, d.h., für jedes k -Tupel (n_1, \dots, n_k) , $n_j \in \{1, \dots, n\}$ und eine beliebige Permutation (m_1, \dots, m_k) von (n_1, \dots, n_k) gilt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_k} \cdots \partial x_{n_1}}(p) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{m_k} \cdots \partial x_{m_1}}(p)$$

Lemma 1.4.10. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $f : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow E$ stetig partiell differenzierbar in $p \in U_{\mathbb{R}^n}$. Dann ist f total differenzierbar in p , und es gilt

$$Df(p) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p).$$

Definition 1.4.11. Ein lineares Koordinatensystem auf einem n -dimensionalen Vektorraum E nennt man ein lineares Isomorphismus $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Es seien jetzt $\varphi, \psi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ zwei (lineare) Koordinatensysteme auf E vorgegeben. Ein Koordinatenwechsel (von φ nach ψ) ist die Bijektion $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Es gibt eine Bijektion zwischen Basen v_1, \dots, v_n von E und linearen Koordinatensystemen $\varphi_{v_1, \dots, v_n} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diese Korrespondenz ist durch

$$\varphi_{v_1, \dots, v_n}^{-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

gegeben. Ist jetzt $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdim. Hilbertraum, so nennt man jedes Koordinatensystem $\varphi_{v_1, \dots, v_n} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, das durch eine orthonormale Basis $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$ von E gegeben ist, ein *euklidisches* (rechtwinkliges, kartesisches) Koordinatensystem.

Definition 1.4.12. Es seien E, E' zwei normierte Vektorräume und $f : U_E \rightarrow U_{E'}$ eine Abbildung. f ist ein *Diffeomorphismus* falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt werden:

- f ist differenzierbar in jedem Punkt aus U_E ,
- $f : U_E \rightarrow U_{E'}$ ist bijektiv,
- $f^{-1} : U_{E'} \rightarrow U_E$ ist differenzierbar in jedem Punkt aus $U_{E'}$.

Bemerkungen. Wie das Beispiel $:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$ zeigt, muss die dritte Bedingung nicht gelten wenn die ersten beiden erfüllt sind.

Definition 1.4.13. Ein *lokales (krummliniges) Koordinatensystem* auf einer offenen Teilmenge U_E eines endlichdimensionalen Vektorraumes E ist ein Diffeomorphismus $\varphi : U_E \rightarrow U_{\mathbb{K}^n}$ auf eine offene Teilmenge $U_{\mathbb{K}^n}$ in \mathbb{K}^n .

Die Komponentenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n : U \rightarrow \mathbb{K}$ von φ nennt man die *Koordinatenfunktionen* bzgl φ . So z.B. in \mathbb{K}^n mit dem kanonischen kartesischen Koordinatensystem sind die Projektionen auf die k -te Komponente $\pi_j : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_k$ die *Koordinatenfunktionen* des kartesischen Koordinatensystem. Meist schreibt man $x_j(p)$ statt $\pi_j(p)$.

Ist ein lokales Koordinatensystem φ auf U_E vorgegeben, so gibt es eine natürliche Korrespondenz zwischen Abbildungen $f : U_E \rightarrow E'$ und Abbildungen $g : \varphi(U_E) \rightarrow E'$: Diese Korrespondenz ist durch $g(\varphi_1, \dots, \varphi_n) := f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \varphi(U_E) \subset \mathbb{K}^n$ sowie $f(q) = g \circ \varphi(q)$, $q \in U_E$, festgelegt. In den meisten Fällen werden wir die gleiche Bezeichnung f sowohl für eine Abbildung $U_E \rightarrow E'$ wie auch für die "koordinatisierte" Version $U_{\mathbb{K}^n} \rightarrow E'$ verwenden. Sind lokale Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vorgegeben, so lassen sich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$ bzgl. des Koordinatensystems $\varphi : U_E \rightarrow \mathbb{K}^n$ bilden. Die partielle Ableitung von $f : U_E \rightarrow E'$ nach der j -ten Koordinate ist dann einfach

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_j}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1(p), \dots, \varphi_j(p) + h, \varphi_{j+1}(p), \dots, \varphi_n(p)) - f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p))}{h}$$

Beispiele für Koordinatenwechsel. Es sei $\varphi : (E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein euklidisches Koordinatensystem.

- Polarkoordinatensystem ψ

$$\begin{array}{ccc} E & & U \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^2 \supset \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\} & \longleftarrow & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \\ (r \cos \phi, r \sin \phi) & \longleftarrow & (r, \phi) \\ (x, y) & \longrightarrow & (\sqrt{x^2 + y^2}, \text{sign}(y) \cdot \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})) \end{array}$$

Hierbei wird die lokale Umkehrfunktion von \cos , \arccos , als eine Bijektion $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ betrachtet.

- Kugelkoordinatensystem ψ

$$\begin{array}{ccc} E & & U \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\} & \longleftarrow & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^3 \\ (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) & \longleftarrow & (r, \phi, \theta) \end{array}$$

Satz über die Umkehrfunktion 1.4.14. Es seien E, E' Banachräume und $\psi : U_E \rightarrow E'$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist die Ableitung $D\psi(x)$ invertierbar, so gibt es offene Umgebungen $U(x)$ von x und $U'(\psi(x))$ von $\psi(x)$, so dass $\psi : U(x) \rightarrow U'(\psi(x))$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $D\psi_z$ invertierbar für alle $z \in U(x)$.

Ist ψ vom Typ C^k so ist auch die Umkehrabbildung ψ^{-1} vom Typ C^k und es gilt $(D\psi^{-1})_y = (D\psi_{\psi^{-1}(y)})^{-1}$.

Bem. Es ist bekannt (und wird in im Rahmen der Funktionalanalysis bewiesen), dass eine bijektive und stetige Abbildung A zwischen Banachräumen eine stetige Umkehrabbildung A^{-1} besitzt. Wie das Beispiel $E := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{K}e_k = \{(y_j)_{j \in \mathbb{N}} : y_j \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } j\}$, e_k ist die unendliche Folge $(y_j)_{j \in \mathbb{N}} \in E$ mit $y_j = \delta_{k,j}$, $L : E \rightarrow E$ linear mit $L(e_j) = (1/j) \cdot e_j$ zeigt, kann auf die Vollständigkeit von E nicht verzichtet werden: L ist nämlich eine stetige bijektive lineare Abbildung $E \rightarrow E$, deren Umkehrabbildung linear aber nicht stetig ist.

Beweis:

- (a) Ersetzt man $z \mapsto \psi(z)$ durch $z \mapsto (D\psi_x)^{-1}(\psi(z+x) - \psi(x))$ so können wir O.B.d.A. annehmen, dass $x = 0$, $\psi : U_E \rightarrow E$, $\psi(0) = 0$ und $D\psi_0 = \text{Id}$ gilt.

- (b) Für $T := \text{Id} - \psi$ gilt $DT_0 = 0$. Daher gibt es wegen Stetigkeit von DT eine Umgebung $B_r(0)$ mit $\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq \frac{1}{2}$, und daher auch nach dem MWS
- (*)
$$\|T(x) - T(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{B_r(0)}$$
- (c) Für jedes $y \in \overline{B_{r/2}(0)}$ gibt es genau ein $x \in \overline{B_r(0)}$ mit $\psi(x) = y$, d.h., es gibt die Umkehrabbildung $g := \psi^{-1} : \overline{B_{r/2}(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$ von ψ .
Dazu zeige man, dass für jedes $y \in \overline{B_{r/2}(0)}$ die Abbildung $T_y(x) := y + T(x)$ genau einen Fixpunkt auf $\overline{B_r(0)}$ hat: Wegen $\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| = \|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ kann man für $F = T_y$ und $X = \overline{B_r(0)}$ den Banachschen Fixpunktsatz 1.3.4 anwenden.
- (d) Nach einer eventuellen Verkleinerung von r definiere man $U(0) := \mathcal{U}_r := \psi^{-1}(B_{r/2}(0)) \cap B_r(0)$. Die bijektive Abbildung $\psi^{-1} : B_{r/2}(0) \rightarrow \mathcal{U}_r$ ist stetig.
Wegen $\|x - y\| = \|T(x) - T(y) + \psi(y) - \psi(x)\| \leq \|T(x) - T(y)\| + \|\psi(y) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\| + \|\psi(y) - \psi(x)\|$, d.h. $\frac{1}{2}\|x - y\| \leq \|\psi(y) - \psi(x)\|$. Für $x = \psi^{-1}(u)$ und $y = \psi^{-1}(v)$ gilt dann $\|\psi^{-1}(u) - \psi^{-1}(v)\| \leq 2\|u - v\|$, $u, v \in B_{r/2}(0)$. Das ergibt die gleichmäßige Stetigkeit von ψ^{-1} .
- (e) $D\psi_x$ ist invertierbar für alle $x \in \mathcal{U}$: $(D\psi_x)^{-1} = (\text{Id} - DT_x)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (DT_x)^\ell$ existiert, da diese Reihe in dem Banachraum $\mathcal{L}(V, V)$ absolut konvergiert.
- (f) Die lineare Abbildung $A_y := (D\psi_{\psi^{-1}(y)})^{-1}$ ist die totale Ableitung von ψ^{-1} an der Stelle $y = \psi(x) \in B_{r/2}(0)$ \square

1.4.15. Vektorfelder. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Ein (stetiges) *Vektorfeld* auf U_E ist eine stetige Abbildung $X : U_E \rightarrow E$. Ist X k -fach stetig differenzierbar, (z.B. für $E = \mathbb{R}^m$ wenn alle Komponenten k -fach stetig partiell differenzierbar sind) so sagt man, dass X ein C^k -Vektorfeld ist. Während ein Vektorfeld sich physikalisch als ein Kraftfeld, elektrisches oder magnetisches Feld, hamiltonisches Vektorfeld etc. deuten läßt, ist die mathematische Bedeutung von X die der Richtungsableitung an der Stelle $p \in U_E$ in die Richtung $X(p)$. Ein Vektorfeld kann also auf differenzierbare Funktionen angewendet werden: Für $f : U_E \rightarrow E'$ gilt

$$Xf(p) := D_{X(p)}f(p)$$

Wenn $E = \mathbb{R}^n$, x_1, \dots, x_n die kartesische Koordinatenfunktionen auf E sind und $X(p) = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$Xf(p) = D_{(v_1, \dots, v_n)}f(p) = \sum_{k=1}^n v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = \langle (v_1, \dots, v_n), \text{grad } f(p) \rangle$$

Aus diesem Grund benutzt man für ein Vektorfeld $X = (X_1, \dots, X_n)$ auf einer offenen Teilmenge $U_{\mathbb{R}^n}$ auch die Schreibweise

$$X(p) = \sum_{j=1}^n X_j(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \quad X_j \in C^0(U_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{K})$$

Damit gilt $X(p)f = D_{X(p)}f(p) = Xf(p) = \sum_{j=1}^n X_j(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$. Insbesondere ist $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ein Beispiel eines Vektorfeldes auf \mathbb{R}^n . Die gleiche Konstruktion kann man für ein beliebiges Koordinatensystem $\varphi : U_E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset E$ offene Teilmenge, durchführen. Ein C^k -Vektorfeld X induziert eine Abbildung $X : C^k(U_E, \mathbb{K}) \rightarrow C^{k-1}(U_E, \mathbb{K})$, (d.h., X bildet differenzierbare Funktionen auf zumindest stetige Funktionen ab), die \mathbb{K} -linear ist und der Leibnizregel genügt: $\forall \lambda_j \in \mathbb{K}, g_j \in C^k(U_E)$

$$\begin{aligned} X(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= \lambda_1 X(g_1) + \lambda_2 X(g_2) && \mathbb{K}\text{-Linearität} \\ X(g_1 \cdot g_2) &= X(g_1) \cdot g_2 + g_1 \cdot X(g_2) && \text{Leibnizregel} \end{aligned}$$

Man sagt auch, dass ein C^k -Vektorfeld X sich als ein *Differentialoperator erster Ordnung*, nämlich $X : C^k(U_E, \mathbb{K}) \rightarrow C^{k-1}(U_E, \mathbb{K})$, auffassen läßt.

Umgekehrt, läßt sich jedes Vektorfeld X , aufgefasst als eine lineare Abbildung $X : C^k(U) \rightarrow C^{k-1}(U)$, die der Leibnizregel genügt, auch als eine Abbildung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ interpretieren: Sind nämlich x_1, \dots, x_n die Koordinatenfunktionen auf \mathbb{R}^n (und U), so ist diese Abbildung durch

$$p \mapsto (X(x_1)(p), \dots, X(x_n)(p)) \quad \text{gegeben.}$$

Der Vorgang des Differenzierens läßt sich iterieren: sind X_1, \dots, X_k C^k -Vektorfelder auf U_E , so kann man die folgende Abbildung definieren:

$$X_k \cdots X_2 X_1 : C^k(U_E) \rightarrow C^0(U_E), \quad X_k \cdots X_2 X_1(f) := X_k(\cdots X_2(X_1 f)) \cdots$$

Sind z.B. x_1, \dots, x_n kartesischen Koordinatenfunktionen auf U_E (E sei hierbei ein endlichdimensionaler Hilbertraum) und $\partial/\partial x_j$ die partiellen Ableitungen (d.h., Richtungsableitungen in die Richtungen e_1, \dots, e_n bzgl. einer orthonormalen Basis (e_j) von E) ist der folgende Differentialoperator zweiter Ordnung:

$$\Delta := \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

der sog. *Laplaceoperator*. Er kann ähnlich wie eine Vektorfeld als eine \mathbb{K} -lineare Abbildung $C^k(U_E) \rightarrow C^{k-2}(U_E)$ aufgefasst werden, die obige Leibnizregel muss allerdings durch eine kompliziertere Formel ersetzt werden.

Bevor wir die nächste Aussage formulieren, verallgemeinern wir den Begriff einer partiellen Ableitung, die dann in einer koordinatenfreien Situation Anwendung findet. Anstatt nur in die Richtung eines Vektors $e_j \in E$ abzuleiten, definieren wir eine Ableitung "in Richtung eines Untervektorraumes $E_j \subset E$ ". Dazu wähle man eine Zerlegung (direkte Summe bzw. direktes Produkt) $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$ von E in endlich viele abgeschlossene Untervektorräume. Für eine Abbildung $F : U_{E_1} \times U_{E_2} \times \cdots \times U_{E_k} \rightarrow E'$ definiere man die folgende lineare Abbildung (falls existent): $\partial_{F_j} F(a_1, \dots, a_k) := DF_{(j,a)}(a_j) : E_j \rightarrow E'$, wobei $F_{(j,a)} : U_{E_j} \rightarrow E'$ ist die Einschränkung $F_{(j,a)}(y) := F(a_1, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_k)$ bezeichnet. Z.B. für $E = \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) : x_j \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n) : y_j \in \mathbb{R}\} = E_1 \oplus E_2$ und $F = (F_1, \dots, F_k) : U_{E_1} \times U_{E_2} \rightarrow \mathbb{R}^k$ gilt

$$\partial_{E_1} F(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \quad \partial_{E_2} F(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial y_n}(a) \end{pmatrix}$$

Ist dann F sogar Frechet-differenzierbar an der Stelle $p = (p_1, \dots, p_k)$, so existieren alle partiellen Ableitungen in die Richtungen E_1, \dots, E_k und es gilt für alle $v = (v_1, \dots, v_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$:

$$DF_{(p_1, \dots, p_k)}(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^k \partial_{E_j} F_{(p_1, \dots, p_k)}(v_j)$$

Satz über die impliziten Funktionen 1.4.16. *Es seien $U_j \subset E_j$ offene Teilmengen der Banachräume E_j , $j = 1, 2$, $F : U_1 \times U_2 \rightarrow E'$ eine C^n -Funktion und $(a, b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a, b) = 0$. Ist $\partial_{V_2} F(a, b) : V_2 \rightarrow E'$ ein linearer Isomorphismus, so gibt es in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(a) \subset U_1$ von a eine eindeutig bestimmte C^n -Funktion $\phi : U(a) \rightarrow E_2$ mit $\phi(a) = b$ und $F(x, \phi(x)) = 0$ für alle $x \in U(a)$.*

Beweis: Man definiere die Abbildung $\Psi : U_1 \times U_2 \rightarrow U_1 \times E' \subset E_1 \times E'$ durch $\Psi(x, y) := (x, F(x, y)) =: (\Psi_1(x, y), \Psi_2(x, y))$. Deren Ableitung

$$D\Psi_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \partial_{V_1} \Psi_1(a, b) & \partial_{V_2} \Psi_1(a, b) \\ \partial_{V_1} \Psi_2(a, b) & \partial_{V_2} \Psi_2(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_{V_1} & 0 \\ \partial_{V_1} F(a, b) & \partial_{V_2} F(a, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(V_1 \times V_2, V_1 \times W)$$

ist invertierbar (und die inverse lineare Ableitung ist $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ B & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -A^{-1}B & A^{-1} \end{pmatrix}$).

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist Ψ , eingeschränkt auf eine geeignete Teilmenge $V_1 \times V_2$ von (a, b) in $E_1 \times E_2$, ein Diffeomorphismus auf das Bild. Es sei $\Phi := \Psi^{-1} =: (\Phi_1, \Phi_2)$ die (lokale) Umkehrfunktion. Dann erfüllt die Funktion $\phi(x) := \Phi_2(x, 0)$ die Aussage des Satzes.

Die lokale Eindeutigkeit von ϕ ergibt sich aus der Tatsache, dass $\Psi : V_1 \times V_2 \rightarrow \Psi(V_1 \times V_2) \subset E'$ ein Diffeomorphismus ist. Wäre ϕ_2 eine weitere Funktion, die den Bedingungen des Satzes genügt, so nach einer eventuellen Verkleinerung von V_1 folgt aus der Stetigkeit von ϕ_2 , dass $\phi_2(V_1) \subset V_2$. Dann aber $\Psi(x, \phi(x)) = (x, 0) = \Psi(x, \phi_2(x))$, was $\phi = \phi_2$ impliziert (weil Ψ eine Bijektion ist). \square

Satz vom Rang 1.4.17. *Es seien E, E' endlichdimensionale (normierte, d.h., Banach-) Vektorräume mit $\dim E = n$, $\dim E' = m$ und $F : U_E \rightarrow E$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist der Rang von $DF(p)$ (d.h., $k(p) := \dim(DF(p)(E))$) konstant für alle $p \in U_E$, so gibt es nach einer eventuellen Verkleinerung von $U := U_E$ Koordinatensysteme $\varphi : U \rightarrow \mathbb{K}^n$ und $\psi : U' \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit $F(U) \subset U'$, so dass für $k = \text{Rang}(DF(p))$*

$$F(\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_k(p), 0, \dots, 0) = (\psi_1(F(p)), \dots, \psi_m(F(p))) \quad \text{für alle } p \in U \text{ gilt;}$$

siehe Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E \supset U & \xrightarrow{F} & U' \subset E' \\ \uparrow \varphi & \circlearrowleft & \uparrow \psi \\ V & \longrightarrow & V' \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m \end{array}$$

1.4.18. Polynome und Potenzreihen in mehreren Veränderlichen. Analog zu dem eindimensionalen Fall definiert man Polynome (bzw. polynomiale Funktionen) und Potenzreihen in mehreren Veränderlichen wie folgt: Sind $c_\alpha \in \mathbb{K}$ beliebige Konstanten, so nennt man für $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{K}^m$ den Ausdruck

$$P(y_1, \dots, y_m) := \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha \cdot y^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^m \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq d}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}$$

ein *Polynom* in den Variablen y_1, \dots, y_m . Man nennt d den Grad von P , falls wenigstens ein c_α mit $|\alpha| = d$ nicht verschwindet. Setzt man die n -Tupeln $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^n$ in das Polynom ein, erhält man eine polynomiale Funktion $P : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$. Um unsere Schreibweise zu vereinfachen führen wir die folgende Notation ein: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, sei

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j, & \alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_m! = \prod_{j=1}^m \alpha_j!, \\ (1.4.19) \quad x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} = \prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j}, & x &= (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \\ \partial^\alpha f &:= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} \end{aligned}$$

wobei $f : U \rightarrow E$ eine $|\alpha|$ -mal stetig (partiell) differenzierbare Funktion ist.

Eine *Potenzreihe* in den Variablen y_1, \dots, y_m (um den Punkt z) ist dann die unendliche Summe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m} c_\alpha \cdot (y - z)^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m} c_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \cdot (y_1 - z_1)^{\alpha_1} (y_2 - z_2)^{\alpha_2} \cdots (y_m - z_m)^{\alpha_m} \quad c_\alpha \in \mathbb{K}$$

Diese unendliche Summe konvergiert möglicherweise für kein $(y_1, \dots, y_m) \neq z = (z_1, \dots, z_m)$. Um die Notation so einfach wie möglich zu halten nehmen wir von nun an, dass $z = 0$ ist.

Wir sagen, dass die obige Reihe in dem Punkt (y_1, \dots, y_m) konvergiert, falls für jede Bijektion (Abzählung) $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0^m$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\beta(k)} y^{\beta(k)}$ (Multiindexschreibweise) gegen denselben Grenzwert $g \in \mathbb{K}$ konvergiert. Diese Reihe heißt *absolut konvergent* in dem Punkt (y_1, \dots, y_m) falls die Summen $S_d := \sum_{|\alpha| \leq d} |c_{\alpha_1 \dots \alpha_m}| \cdot |y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}|$ für alle $d \in \mathbb{N}$ beschränkt bleiben. Die Reihe $\sum_{\alpha} c_{\alpha} y^{\alpha}$ konvergiert genau dann absolut, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)} y^{\alpha(k)}$ für jede Abzählung β absolut konvergiert (dann also gegen denselben Grenzwert). Um Bereiche, in denen eine Potenzreihe absolut konvergiert, beschreiben zu können führen wir den Begriff eines (abg.) Polyzylinders ein: Für $r \in \mathbb{R}_{>0}^m$, $z \in \mathbb{K}^m$ sei $\mathcal{P}_r(z) := \{x \in \mathbb{K}^m : |x_j - z_j| \leq r_j, j = 1, \dots, m\}$; $\mathcal{P}_r := \mathcal{P}_r(0)$.

Lemma 1.4.20.

i Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

ii Konvergiert die Reihe $\sum_{|\alpha| \leq d} c_{\alpha} \cdot y^{\alpha}$ absolut für ein $y = (y_1, \dots, y_m)$ so konvergiert die Reihe $\sum_{|\alpha| \leq d} c_{\alpha} \cdot x^{\alpha}$ absolut für jedes $x = (x_1, \dots, x_m)$ mit $|x_j| \leq |y_j|$, $j = 1, \dots, m$.

iii Unter den Voraussetzungen aus ii konvergieren die polynomialen Funktionen $P_d(x) := \sum_{|\alpha| \leq d} c_{\alpha} x^{\alpha}$ auf dem Polyzylinder \mathcal{P}_y gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $\psi : \mathcal{P}_y \rightarrow \mathbb{K}$ (d.h., mit $\psi(x) = \lim_{d \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq d} c_{\alpha} \cdot x^{\alpha}$). Wir sagen dann, dass eine solche Reihe $\sum_{|\alpha| \leq d} c_{\alpha} x^{\alpha}$ eine *Reihenfunktion* ψ auf \mathcal{P}_y definiert,

iv Definiert die Reihe $\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha}$ eine Reihenfunktion auf \mathcal{P}_y , so ist diese Funktion C^{∞} -differenzierbar. Die partielle Differentiation und das Summenzeichen dürfen vertauscht werden:

$$\partial^{\beta} \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \partial^{\beta} (x^{\alpha}) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \cdot \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \cdot x^{\alpha - \beta}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut und definiert eine Reihenfunktion auf dem gleichen Polyzylinder \mathcal{P}_y .

Alle obige Konstruktionen und Aussagen, die die Reihen betreffen, funktionieren genauso gut (mit den offensichtlichen Modifikationen), wenn man statt der Koeffizienten $c_{\alpha} \in \mathbb{K}$ Koeffizienten c_{α} aus einem beliebigen Banachraum E nimmt.

Taylorische Formel in \mathbb{R}^m 1.4.21. Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, E ein normierter Raum und $f : U \rightarrow E$ eine C^{k+1} -differenzierbare Abbildung, $x, h \in \mathbb{R}^m$ und $x + \theta h \in U_E$ für alle $\theta \in [0, 1]$. Dann gilt

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m) = f(x) + \sum_{1 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq k} \frac{h_1^{\alpha_1} \cdots h_m^{\alpha_m}}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}(x) + R_{x,f}^k(h_1, \dots, h_m)$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{x,f}^k(h)}{\|h\|^k} = 0$. Ist $E = \mathbb{R}$ so läßt sich das Restglied $R_{x,f}^k$ auch als

$$R_{x,f}^k(h) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k+1} \frac{h_1^{\alpha_1} \cdots h_m^{\alpha_m}}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}(x + \theta h) \quad \text{für ein } \theta \in [0, 1] \text{ schreiben.}$$

In der Multiindexschreibweise 1.4.19 lautet die Taylorformel:

$$f(x + h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m, |\alpha| \leq k} h^{\alpha} \cdot \frac{\partial^{\alpha} f(x)}{\alpha!} + R_{x,f}^k(h)$$

Wir schreiben daher $T_{x,f}^k(h) := \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x)$ für die Terme bis zur Ordnung k (in den Variablen h_1, \dots, h_m) in der Taylorentwicklung von f und nennen diesen Ausdruck das *Taylorpolynom von f , entwickelt um x von Grad k* .

Wenn man in der Taylorentwicklung 1.4.21 k gegen ∞ laufen läßt, so bekommt man für eine unendlich oft differenzierbare Funktion die *Taylorreihe* $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m} h^\alpha \cdot \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}$ (in den Variablen h_1, \dots, h_m). Sie braucht, wenn überhaupt, nicht gegen f auf noch so kleiner Umgebung des Punktes x zu konvergieren. Ist es aber der Fall, so sagt man, dass f in einer Umgebung von x eine *analytische Funktion* ist.

Lemma 1.4.22. *Es sei E ein Banachraum und $f : U_{\mathbb{K}^m} \rightarrow E$ eine C^∞ -Funktion. Gibt es eine Konstante $B > 0$ sowie eine Umgebung $U(x) \subset \mathbb{K}^m$, so dass $\|D^k f(y)\| \leq B^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $y \in U(x)$ so konvergiert die Taylorreihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m} h^\alpha \cdot \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}$ lokal gleichmäßig gegen f auf jedem Polyzylinder $\mathcal{P}_r(x)$, welcher in $U(x)$ enthalten ist. Insbesondere ist dann f in einer Umgebung von x eine analytische Funktion.*

Lokale Extrema

Definition 1.4.23. Es sei E ein reeller Banachraum und $f : U_E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in U_E$. Man sagt, f habe in p ein

- *lokales Minimum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) \leq f(y)$ für alle $y \in V(p)$;
- *striktes lokales Minimum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) < f(y)$ für alle $y \in V(p) \setminus \{p\}$;
- *lokales Maximum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) \geq f(y)$ für alle $y \in V(p)$;
- *striktes lokales Maximum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) > f(y)$ für alle $y \in V(p) \setminus \{p\}$.

Lemma 1.4.24. (notwendige Bedingung für ein lok. Extremum) *Besitzt eine differenzierbare Funktion $f : U_E \rightarrow \mathbb{R}$ in p ein lokales Extremum, so gilt $Df(p) = 0$.*

Definition 1.4.25. Ein Punkt $p \in U_E$ heißt ein *kritischer Punkt* der differenzierbaren Funktion $f : U_E \rightarrow \mathbb{R}$ falls $Df(p) = 0$.

Bemerkung 1.4.26. In dem Fall $E = \mathbb{R}^m$ folgt aus der Taylorformel 1.4.21, dass für $f \in C^2(U_{\mathbb{R}^m})$

$$f(x+h) = f(x) + \text{grad } f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot H_f(x) \cdot h + R_{x,f}^2(h)$$

gilt, wobei $H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p) \right)_{1 \leq j,k \leq m}$ und $\lim_{h \rightarrow 0} R_{x,f}^2(h)/\|h\|^2 = 0$.

Die Gestalt der Hessematrix entscheidet, ob in einem kritischen Punkt von f ein lokales Extremum vorliegt.

Zur Erinnerung:

Einige Tatsachen aus der linearen Algebra.

- Ist $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung (gegeben durch eine Matrix $A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m}$) so gilt: A invertierbar $\iff m = n$ und $\det A \neq 0$. Hierbei ist

$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

\mathfrak{S}_n die Permutationsgruppe der Elemente $\{1, \dots, n\}$ (d.h., die Menge aller Bijektionen von $\{1, \dots, n\}$ mit Verkettung als Verknüpfung) und

$$(-1)^\sigma := \text{sign}(\sigma) := \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\sigma(k) - \sigma(j)}{k - j} \in \{-1, 1\}$$

Zum Beispiel $\det \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = xw - yz$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Für Abb zwischen unendlichdim Banachräumen, läßt sich die Determinante nicht sinnvoll definieren.

• Eine symmetrische und stetige \mathbb{R} -bilineare Abbildung (2-Form) $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Hilbertraum V nennt man

positiv definit, wenn $b(v, v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$

positiv semidefinit, wenn $b(v, v) \geq 0$ für alle $v \in V$

negativ definit, wenn $b(v, v) < 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$

negativ semidefinit, wenn $b(v, v) \leq 0$ für alle $v \in V$

indefinit, wenn keiner der obigen 4 Fälle vorliegt.

In dem Fall $V = \mathbb{R}^n$ sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt, d.h. $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$. Für jede symmetrische 2-Form b auf \mathbb{R}^n gibt es eine symmetrische $n \times n$ Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass

$$(1.4.27) \quad b(x, y) = x^T \cdot B \cdot y = \langle Bx, y \rangle$$

wobei Vektoren aus \mathbb{R}^n als Spaltenvektoren aufgefasst werden. Umgekehrt, jede symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert eine symmetrische bilineare Form $b(x, y) := x^T \cdot S \cdot y$ auf \mathbb{R}^n . In \mathbb{R}^n brauchen wir also nicht zwischen symmetrischen Matrizen und symmetrischen Bilinearformen zu unterscheiden.

• Ein *Eigenwert* einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ (oder einer $n \times n$ Matrix, aufgefasst als eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$) ist ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$, für den es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $A(v) = \lambda \cdot v$ gibt. Einen solchen Vektor v nennt man einen *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ . Die Eigenwerte von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind exakt die Nullstellen des sog. charakteristischen Polynoms (vom Grad n): $P_A(t) := \det(A - t\text{Id})$. $A : V \rightarrow V$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, die nur aus Eigenvektoren zu Eigenwerten von A besteht. Bzgl. einer solchen Basis ist die darstellende Matrix $M(A)$ der linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge exakt die Eigenwerte von A sind. Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar (z.B. allgemeine Drehungen der Ebene). Dagegen jede \mathbb{R} -symmetrische Matrix B (d.h., $B = B^T$) ist diagonalisierbar (mit reellen Eigenwerten). Ist d_+ die Anzahl der positiven Eigenwerte von M und d_- die Anzahl der negativen Eigenwerte von M , so nennen wir (d_+, d_-) den *Typ* von M . Ist S eine symmetrische reelle Matrix, T eine beliebige invertierbare Matrix so ist der Typ von S gleich dem Typ von $T^T \cdot S \cdot T$.

• Das **Kriterium von Sylvester**. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit genau dann wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ die Hauptunterdeterminanten $\det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ positiv sind. Vorsicht: Eine symmetrische Matrix A ist negativ definit genau dann wenn $-A$ positiv definit ist (und nicht wenn alle Hauptdeterminanten negativ sind! Die korrekte Bedingung hier wäre "für alle k sind $(-1)^{k+1} \det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ negativ").

Allgemeiner nennt man eine $k \times k$ Unterdeterminante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m, n \geq k$, die Determinante einer $k \times k$ Untermatrix B von A . Dabei wird solch ein B aus den Einträgen von A gebildet, die nach der Entfernung von irgendwelcher $m - k$ Zeilen und irgendwelcher $n - k$ Spalten aus A entsteht.

Z.B. sind

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_3 & b_4 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \text{ etc. Beispiele von } 2 \times 2\text{-Unterdeterminanten von } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

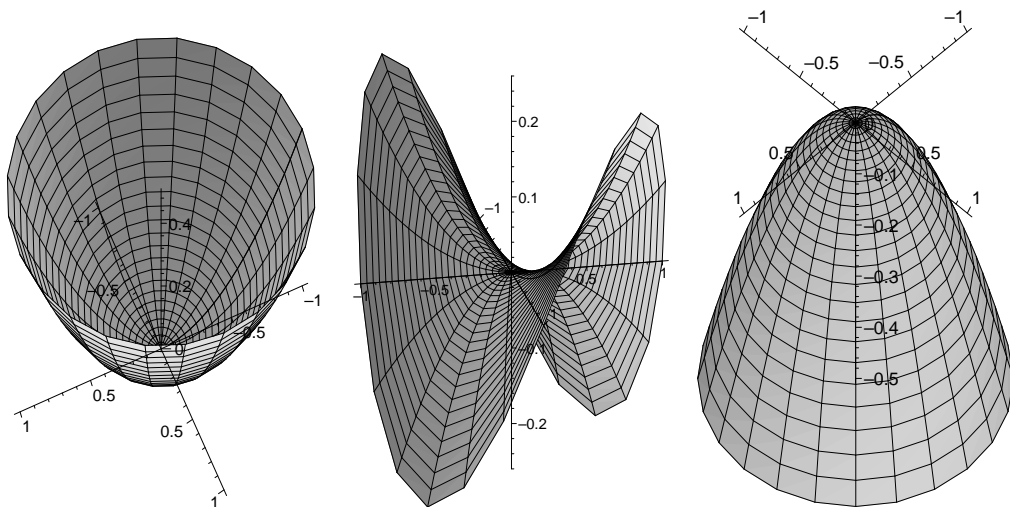
- Es sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und B die entsprechende symmetrische Matrix wie in (1.4.27). Die (In)Definitheit von b lässt sich von den Eigenwerten von B ablesen:
 b (semi)positiv definit \iff alle Eigenwerte von B sind positiv (nichtnegativ)
 b (semi)negativ definit \iff alle Eigenwerte von B sind negativ (nichtpositiv)
 b indefinit \iff es gibt mindestens zwei Eigenwerte von B mit verschiedenen Vorzeichen.

Jetzt können wir hinreichende Bedingungen für lokale Extrema angeben. Entscheidend hierfür ist 1.4.26 sowie die vorangehenden Bemerkung über Definitheit von symmetrischen reellen Matrizen.

Lemma 1.4.28. *Es sei $f : U_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, für die $p \in U$ ein kritischer Punkt ist. Es gilt dann*

$$\begin{aligned} H_f(p) \text{ positiv definit} &\implies f \text{ hat ein striktes lokales Minimum in } p \\ H_f(p) \text{ negativ definit} &\implies f \text{ hat ein striktes lokales Maximum in } p \\ H_f(p) \text{ indefinit} &\implies \text{kein lokales Extremum in } p \end{aligned}$$

Untenstehend sind Graphen von einigen Funktionen $f : U_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}$ abgebildet, für die der Nullpunkt ein kritischer Punkt ist; nur die erste und die dritte Funktion hat in 0 auch ein lokales Extremum.



Morse Lemma 1.4.29. *Es sei $f \in C^3(U_{\mathbb{R}^m})$. Angenommen $Df(p) = 0$ und die Hessematrix $H_f(p)$ ist invertierbar. Dann gibt es ein lokales Koordinatensystem $\varphi : U(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(p) = 0$, so dass in den neuen Koordinaten $\varphi_1, \dots, \varphi_m$*

$$f(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = f(0) + \varphi_1^2 + \dots + \varphi_{d_+}^2 - \varphi_{d_++1}^2 - \dots - \varphi_{d_++d_-}^2$$

Hierbei ist (d_+, d_-) der Typ von $H_f(p)$.

Definition 1.4.30. (Untermannigfaltigkeiten) Es sei $\dim E = n$. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt eine k -dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von E falls M eine abgeschlossene Teilmenge von E ist und um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ auf einer Umgebung $U(p)$ von p in E existiert, so dass

$$M \cap U(p) = \{q \in U(p) : \varphi_{k+1}(q) = \dots = \varphi_n(q) = 0\}$$

gilt.

Bemerkung 1.4.31.

- Es sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $M_c := \{g = c\}$ eine Teilmenge. Dann ist M_c eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit wenn für jedes $p \in M_c$ die Ableitung $Dg(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ den Rang $n - k$ hat, d.h., es existiert eine nichtverschwindende $(n - k) \times (n - k)$ Unterdeterminante der Jacobimatrix $\text{Jac}_p(g) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(p) \right)_{1 \leq j \leq n-k, 1 \leq k \leq n}$.
- Besitzt $\text{Jac}_p(g)$ eine nichtverschwindende $(n - k) \times (n - k)$ Unterdeterminante, so kann man nach einer eventuellen Umordnung $z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_{n-k}$ der kartesischen Koordinatenfunktionen x_1, \dots, x_n annehmen, dass die Matrix

$$\frac{\partial g}{\partial y}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(p) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_{n-k}}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial y_1}(p) & \dots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial y_{n-k}}(p) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Dann bilden sie Funktionen

$$\varphi_1 := z_1, \dots, \varphi_k := z_k, \varphi_{k+1} := g_1, \dots, \varphi_n := g_{n-k}$$

ein lokales Koordinatensystem auf einer Umgebung $V(p) \subset \mathbb{R}^n$ von $p \in M$, welches die Bedingung in der Def 1.4.30 erfüllt.

Der *Tangentenraum* an eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$ in einem Punkt $p \in M$ ist ein Untervektorraum $T_p M \subset \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$(1.4.32) \quad T_p M = \{v \in \mathbb{R}^n : D_v g(p) = 0\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \text{grad } g_1(p) \cdot v = 0 \\ \vdots \\ \text{grad } g_{n-k}(p) \cdot v = 0 \end{array} \right\}$$

Hierbei ist $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ein C^1 -diffbare Funktion, die die Untermannigfaltigkeit M lokal definiert (d.h., $\text{Rang}(\text{Jac}_p(g)) = k$) und $x \cdot y$ bezeichnet das kanonische euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Anschaulich (aber etwas unpräzise) formuliert, ist dieser Untervektorraum, parallel verschoben zum Punkt p , die bestmögliche lineare Approximation der Menge M durch einen linearen Teilraum in der Nähe des Punktes p .

Bemerkung 1.4.33. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, so gilt

$$T_p M = \{ \dot{\gamma}(0) \in \mathbb{R}^n : \text{für alle differenzierbare Kurven } \gamma : I_\gamma \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = p \}$$

Extrema mit Nebenbedingungen. Es sei $f : U_E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Statt f nach lokal maximalen oder minimalen Werten $f(p)$ in einer ganzen Umgebung U in E zu untersuchen, möchte man

manchmal nur wissen ob $f(p)$ ein lokales Extremum unter den Werten $f(q)$ bloß für eine Teilmenge $M \subset U(p)$ (d.h., für $q \in M$) annimmt. (Man ersetze in der Def. 1.4.23 $V(p)$ gegen $M \cap V(p)$ um eine Definition von lokalen Extrema unter der Nebenbedingung $M = \{g = 0\}$ zu erhalten.) Falls $M = \{g = 0\} \subset E$ eine Untermannigfaltigkeit ist, so gibt es die folgenden Kandidaten für Punkte in M in denen f lokale Extrema haben könnte (d.h., kritische Punkte für f unter den Nebenbedingung $g = 0$).

Lagrangesche Multiplikatorenregel 1.4.34. *Es seien $f : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ stetig differenzierbar. Hat f in $p \in M := \{x \in U : g(x) = 0\}$ ein lokales Extremum, und besitzt darüberhinaus $\text{Jac}_p g$ eine nichtverschwindende $\ell \times \ell$ -Determinante (äquivalent dazu: "die Vektoren $\text{grad } g_1(p), \dots, \text{grad } g_\ell(p)$ sind linear unabhängig"), so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$ (die sog. Lagrangeschen Multiplikatoren), so dass:*

$$Df(p) + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \cdot Dg_j(p) = 0$$

Man findet also Kandidaten für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ in dem man nach Lösungen $p \in U$ des Gleichungssystems

$$g(p) = 0, \quad \text{grad } f(p) + \sum \lambda_j \cdot \text{grad } g_j(p) = 0$$

für irgendwelche $\lambda_j \in \mathbb{R}$ sucht. Die rechte Gleichung besagt, dass in einem kritischen Punkt p der Gradient $\text{grad } f(p)$ senkrecht zu dem Tangentialraum $T_p M$ sein muss, vgl. 1.4.32

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Bewegung $x(t)$ eines physikalischen Systems genügt oft einer gewissen Differentialgleichung. Mathematisch lassen sich diese Sachverhalte wie folgt formulieren. Es sei $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, definiert auf dem Quader $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $Q = \{(s, y) : |s - s_0| \leq r_1, \|y - y_0\|_\infty \leq r_2\}$. Eine *gewöhnliche* (im Unterschied zu einer 'partiellen') *Differentialgleichung erster Ordnung* ist dann der Ausdruck $\dot{x} = F(t, x(t))$. Eine lokale Lösung (falls existent) ist eine differenzierbare Kurve, definiert auf einem Intervall $I \subset [s_0 - r_1, s_0 + r_1] \subset \mathbb{R}$, $x : I \rightarrow B_{r_2}(y_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Wie allgemein üblich, bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung $Dx(t)$. Ein Anfangswertproblem (AWP) ist die Frage nach der Existenz der Lösung (und deren Eindeutigkeit) des obigen DGL mit der *Anfangsbedingung* $x(s_0) = y_0$.

Theorem 2.1.1. (Picard-Lindelöf) *Es sei $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n =: E$ eine stetige Abbildung, definiert auf dem kompakten Quader $Q = \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |s - s_0| \leq r_1, \|y - y_0\|_\infty \leq r_2\}$. Erfüllt f die Lipschitz-Bedingung*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq C \cdot \|y - z\|, \quad C > 0, \quad \forall (t, y), (t, z) \in Q,$$

so besitzt das Anfangswertproblem (AWP)

$$(*) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(s_0) = y_0$$

genau eine Lösung $x : I \rightarrow Q$ auf einem hinreichend kleinen Intervall $I \subset [s_0 - r_1, s_0 + r_1]$.

Die Idee des **Beweises** ist die folgende: Ist $\gamma : I \rightarrow B_{r_2}(y_0)$ eine Lösung von (*), so gilt $\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^s F(t, \gamma(t)) dt$. Die rechte Seite dieser Gleichung wird zur Definition der folgenden Abbildung benutzt: Für $I_\delta := [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ sei $X_\delta := \{c : I_\delta \rightarrow \overline{B_{r_2}(y_0)}\} \cap C^0(I_\delta, E)$ und

$$\Psi : X_\delta \rightarrow C^0(I_\delta), \quad \eta \mapsto \Psi(\eta) \quad \text{mit} \quad \Psi(\eta)(s) := y_0 + \int_{s_0}^s F(t, \eta(t)) dt$$

Eine Lösung γ des AWP ist eine Fixpunkt von Ψ , d.h. $\Psi(\gamma) = \gamma$, und vice versa. Wenn $\delta < \min\{r_1, r_1/\|F\|_Q, 1/C\}$, so gilt $\Psi(X_\delta) \subset X_\delta$ und $\Psi : X_\delta \rightarrow X_\delta$ ist eine Kontraktion. Da X_δ eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $(C^0(I_\delta), \|\cdot\|_{I_\delta})$ ist (und daher selbst ein vollständiger metrischer Raum), der Banachsche Fixpunktsatz 1.3.4 kann auf $\Psi : X_\delta \rightarrow X_\delta$ angewendet werden. Deren eindeutiger Fixpunkt, die Kurve $\gamma \in X_\delta$ mit $\Psi(\gamma) = \gamma$, ist dann die eindeutig bestimmte (lokale) Lösung unseres AWP. \square

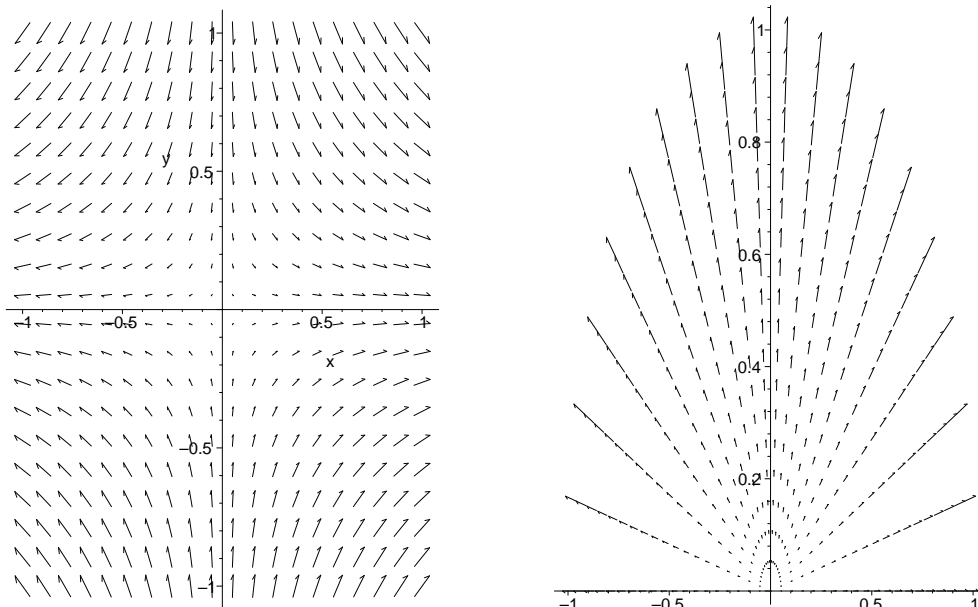
Bemerkungen

- Ist $\gamma : I \rightarrow B_{r_1}(y_0)$ die Lösung des AWP (*), so ist $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t+s_0)$ die Lösung des AWP $\tilde{\gamma}' = F(t, \tilde{\gamma})$, $\tilde{\gamma}(0) = y_0$, und ist definiert auf dem Intervall $I - s_0$
- Für die Existenz und Eindeutigkeit der lokalen Lösung des AWP (*) genügt es bloß anzunehmen, dass F lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Variable ist, d.h., um jeden Punkt $(s, y) \in Q$ gibt es eine Umgebung $U = (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \times B_r(y) \subset Q$, so dass $\|F(t, z) - F(t, w)\| \leq C_U \cdot \|z - w\|$ für alle $(t, z), (t, w) \in U$ gilt. Diese Bedingung ist automatisch erfüllt wenn F stetig differenzierbar ist.
- **Existenzsatz von Peano.** Wenn man auf die lokale Lipschitz-Stetigkeit (in der zweiten Variable) von F verzichtet, so gibt es immer noch zu jedem $(s_0, y_0) \in Q$ eine lokale Lösung von (*), die dann allerdings nicht mehr eindeutig bestimmt sein muss.

Definition 2.1.2. Es sei $F : I \times U_E \rightarrow E$ vorgegeben. Eine Lösung $\gamma : J \rightarrow U$ der DGL $\dot{\gamma}(t) = F(t, \gamma(t))$, wobei J ein Intervall $\subset \mathbb{R}$ ist, heißt *maximal*, falls für jede Lösung $\eta : J \rightarrow U$ mit $J \supset I$ und $\eta|_I = \gamma$ dann auch schon $I = J$ gilt.

Lemma 2.1.3. Es sei $U_E \subset E$ eine offene Teilmenge eines Banachraumes E (z.B. $E = \mathbb{R}^n$), ferner $F : I \times U_E \rightarrow E$ eine stetige, und darüber hinaus in der zweiten Variable lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Dann gibt es zu jedem $y_0 \in U$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\gamma_{y_0} : I_{y_0} \rightarrow U_E$ der DGL $\dot{x} = F(t, x)$ mit der AB $\gamma_{y_0}(0) = y_0$. Das Definitionsintervall I_{y_0} ist offen.

Bemerkung. Es sei $X : U_E \rightarrow E$ ein Vektorfeld, vgl. 1.4.15. Eine Integralkurve von X ist eine differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow U_E$, so dass $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in I$ gilt. Visualisiert man X mit Hilfe von Pfeilen,



so sind in dem linken Bild Hyperbeln, die 4 Halbgeraden enthalten in den beiden Koordinatenachsen sowie der Nullpunkt die Spuren der Integralkurven, während in dem rechten Bild die Halbstrahlen mit Ursprung 0 die Spuren der Integralkurven dieses radialen Vektorfeldes sind.

Eine Lösung von (*) mit der AB $\gamma(t_0) = x_0 \in U_E$ zu finden ist äquivalent zu der Bestimmung einer Integralkurve durch x_0 (bzw. (t_0, x_0)) des entsprechenden Vektorfeldes X_F : In dem autonomen Fall ist das trivialerweise richtig. In dem nicht-autonomen Fall (d.h., wenn F explizit noch von t abhängt) betrachtet man das VF $X_F : I \times U_E \rightarrow \mathbb{R} \times E$, $(s, y) \mapsto (1, F(s, y))$; die E -Komponente der Integralkurve zu X_F ist dann die Lösung des AWP (*).

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen. Es sei I eine Intervall, E ein Banachraum und $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ eine stetige Abbildung. Die folgende DGL

$$(**) \quad \dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + b, \quad b \in E,$$

die ein Spezialfall der bereits diskutierten allgemeinen gewöhnlichen Differentialgleichungen ist, nennt man *linear*. Sie heißt *homogen*, falls $b = 0$ und *inhomogen* falls $b \neq 0$. In der Notation von 2.1.1 gilt $F : I \times E \rightarrow E$, $F(s, y) = A(s) \cdot y$. Die wichtigsten Eigenschaften solcher Differentialgleichungen sind:

- Das Definitionsintervall J jeder maximalen Lösung $\gamma_y : J \rightarrow E$ stimmt mit I überein.
- Die Menge \mathbb{L}_{hom} aller maximalen Lösungen von (**) für $b = 0$ bildet einen Vektorraum der gleichen Dimension wie E .
- Die Menge aller Lösungen der inhomogenen DGL hat die Gestalt $\gamma_p + \mathbb{L}_{\text{hom}}$ wobei γ_p irgendeine (sog. partikuläre) Lösung von (**) ist.
- Falls A nicht von t abhängt, d.h., wir habe eine *konstante* Abbildung $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ dann lassen sich die dann auf ganz \mathbb{R} definierten maximalen Lösungen γ_y der homogenen Gleichung folgendermaßen angeben: $\gamma_y(s) = \exp(sA) \cdot y$. In dem inhomogenen Fall läßt sich eine partikuläre Lösung durch die Methode der Variation de Konstanten ermitteln.
- In dem Fall einer allgemeinen linearen DGL (d.h. mit nichtkonstanten Koeffizienten) gibt es keine 'praktikablen' Formeln, die die Lösung in Abhängigkeit von $A(t)$ explizit ausdrücken. Hier muss man jeden Fall einzeln betrachten um mit Glück eine explizite Formel zu bekommen. In dem Spezialfall $E = \mathbb{R}$, die (1-dimensionale) Gleichung $\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t)$, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s_0 \in I$ mit der AB $\gamma_y(s_0) = y$ hat die Lösung

$$\gamma_y(s) = y \cdot e^{\int_{s_0}^s a(t) dt}.$$

3. Funktionentheorie

3.1. Komplexen Zahlen und komplexe Differenzierbarkeit

Auf dem reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 definiere man die folgende kommutative Multiplikation:

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1y_1 + x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Identifiziert man \mathbb{R} mit der Teilmenge $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, so entspricht die gerade definierte Multiplikation, eingeschränkt auf diese Teilmenge, der gewöhnlichen Multiplikation auf \mathbb{R} (man sagt auch, dass die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^2, \cdot), t \mapsto (t, 0)$ ein injektiver Homomorphismus ist). Es gilt weiter $(x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d.h., $(1, 0)$ ist das Einselement in $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$. Das Element $(0, 1)$ hat die Eigenschaft $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Ferner, jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ hat ein (multiplikatives) Inverse, d.h., $(x, y)^{-1} := (x/(x^2 + y^2), -y/(x^2 + y^2))$ hat die Eigenschaft

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

Es gilt auch das Distributivgesetz, d.h. für alle $z, w, u \in \mathbb{R}^2$ haben wir die Identität

$$(z + w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u$$

Zusammenfassend bildet also die Menge \mathbb{R}^2 zusammen mit der üblichen Addition (aus der Vektorraumstruktur von \mathbb{R}^2) sowie der gerade definierten Multiplikation “ \cdot ” den sog. (kommutativen) *Körper der komplexen Zahlen*, den wir mit \mathbb{C} bezeichnen. Um unsere Notation zu vereinfachen, schreiben wir i statt $(0, 1)$, so dass jedes Element $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der Gestalt $x + iy$ geschrieben werden kann. Wir schreiben weiter $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ für die (euklidische) Standardnorm in \mathbb{C} (damit können wir von Konvergenz und Grenzwerten in \mathbb{C} sprechen), sowie $\bar{z} = \overline{x + iy} := x - iy$ ist die komplexe Konjugation. Für den Rest dieses Kapitels behalten wir im Hinterkopf die Identifizierung \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 vermöge $z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ (wie auch $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (u, v) \mapsto u + iv$).

In diesem Kapitel betrachten wir fast ausschließlich Abbildungen $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $U_{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge in dem Körper \mathbb{C} ist. Wir nennen eine solche offene Teilmenge ein *Gebiet*, falls $U_{\mathbb{C}}$ auch noch zusammenhängend ist, vgl. 1.3.6.

Definition 3.1.1. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *\mathbb{C} -differenzierbar* oder *holomorph* in $z_0 \in \mathbb{C}$ falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

in \mathbb{C} existiert. Wir schreiben $f'(z_0)$ für diesen Grenzwert. f heißt *\mathbb{C} -differenzierbar* (oder *holomorph*) falls der obige Grenzwert für alle $z_0 \in U$ existiert.

Lemma 3.1.2. Es seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}, h : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann ist

i $af + bg : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph für alle $a, b \in \mathbb{C}$; $(af + bg)' = af' + bg'$

ii $f \cdot g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sowie $f/g : U \setminus \{g = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$,
 $(f/g)' = (f' \cdot g - g' \cdot f)/g^2$;

iii (Kettenregel) $f \circ h : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, falls $h(V) \subset U$ gilt; $(f \circ h)'(z) = f'(h(z)) \cdot h'(z)$.

Wir schreiben $\mathcal{O}(U)$ für die \mathbb{C} -algebra aller in jedem Punkt von U \mathbb{C} -differenzierbaren Funktionen.

Beispiele holomorpher Funktionen sind komplexe Polynomfunktionen $P(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ (definiert auf ganz \mathbb{C}) sowie Reihenfunktionen $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ auf dem Konvergenzgebiet, d.h., auf

der offenen Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$, wobei nach Cartan-Hadamard

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ ist. Hierbei wird natürlich vorausgesetzt, dass $r > 0$ gilt. So, z.B. sind

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

auf ganz \mathbb{C} definierte holomorphe Funktionen, die eingeschränkt auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit den reellen Exponential- sowie trigonometrischen Funktionen übereinstimmen.

Die Konjugationsfunktion $z \mapsto \bar{z}$, deren Potenzen $z \mapsto (\bar{z})^k$ sowie die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ sind Beispiele von Funktionen, die nicht holomorph sind.

Da wir sehr oft mit Potenzreihen befassen werden, führen wir den folgenden allgemeinen Konvergenzbegriff ein:

Definition 3.1.3. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe von Funktionen $f_k : U \rightarrow \mathbb{C}$. Man sagt, dass die Reihe *normal auf* U konvergiert, wenn für jeden Punkt $z \in U$ eine Umgebung $B(z) \subset U$ existiert, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{B(z)}$ absolut konvergent ist. Hierbei bezeichne $\|f\|_B$ die Supremumsnorm von f auf B .

Die Partialsummen einer normal konvergenten Reihe konvergieren lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{C}$. Ist jetzt speziell $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r , so konvergiert diese Reihe normal auf der offenen Kugel $B_r(z_0)$ gegen die Reihenfunktion $g(z)$.

Lemma 3.1.4. Es sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, aufgefasst als eine Abbildung $f = (f_1, f_2) : U_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Dann ist f \mathbb{C} -diffbar in $z_0 = x_0 + iy_0$ genau dann wenn (f_1, f_2) total differenzierbar (im Sinne 1.4.3.c) ist, und darüberhinaus

$$(*) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)$$

gilt. Die obigen Gleichungen heißen *Cauchy-Riemannschen Gleichungen*.

Bemerkung. In dem obigen Lemma wird vorausgesetzt, dass die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, aufgefasst als $U_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}^2$, total \mathbb{R} -differenzierbar ist. Die totale Differenzierbarkeit ist bekanntlich stärker als bloße Existenz der partiellen Ableitungen. Der Satz von Looman- Menchof (der wesentlich schwieriger zu beweisen ist) besagt, dass $f(z) = u(z) + iv(z)$ bereits auf U holomorph ist, wenn f partielle Ableitungsfunktionen besitzt, die in allen Punkten der Definitionsbereiches U die Cauchy-Riemann Gleichungen (*) erfüllen.

Folgerungen:

- Der Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion f sind harmonische Funktionen, d.h. $\Delta(\operatorname{Re} f) = \Delta(\operatorname{Im} f) = 0$

3.2. Integralformel von Cauchy

Eine Kurve (Weg) $\gamma : I \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ nennt man stückweise stetig differenzierbar, falls γ stetig ist, und darüberhinaus eine Unterteilung $a = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$ des Intervalls $I = [a, b]$

existiert, so dass alle Einschränkungen $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ für alle $j = 1, \dots, n$ stetig differenzierbar sind. (In den Randpunkten t_j und t_{j+1} von $[t_j, t_{j+1}]$ wird dann für γ nur die Existenz der einseitigen Grenzwerte $\lim_{s \rightarrow t_k} (\gamma(s) - \gamma(t_k)) / (s - t_k)$ gefordert; i.A. gilt dann

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t_k \\ s < t_k}} \frac{\gamma(s) - \gamma(t_k)}{s - t_k} \neq \lim_{\substack{s \rightarrow t_k \\ s > t_k}} \frac{\gamma(s) - \gamma(t_k)}{s - t_k}$$

und $\gamma'|_{[t_j, t_{j+1}]}$ muss stetig sein.) Es sei jetzt $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : I \rightarrow U_{\mathbb{C}}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds$$

und nennen $\int_{\gamma} f(z) dz$ das *Kurven- oder Wegintegral* entlang von γ .

Bemerkung 3.2.1. Es sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow U_{\mathbb{C}}$ (allgemeiner $U_{\mathbb{R}^n}$) eine stückweise stetig differenzierbare Kurve sowie $\varphi, \psi, f \in C^0(U(\gamma(I)))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

- Wie aus der Theorie der Riemannschen Integration bekannt, gilt auch für Wegintegrale:

$$\int_{\gamma} (\alpha\varphi(z) + \beta\psi(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} \varphi(z) dz + \beta \int_{\gamma} \psi(z) dz, \quad \left\| \int_{\gamma} \psi(z) dz \right\| \leq \int_{\gamma} \|\psi(z)\| |dz|,$$

- Ist Φ eine Stammfunktion von φ , so gilt $\int_{\gamma} \varphi(z) dz = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a))$
- Der Wert von $\int_{\gamma} f(z) dz$ hängt nur von der Spur $S p(\gamma) = \gamma(I)$ und nicht von der Wahl der Parametrisierung von $S p(\gamma)$: Ist nämlich $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $\mu : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ein orientierungserhaltender (stückweiser) Diffeomorphismus, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \mu} f(z) dz$$

Ist jedoch μ orientierungsumkehrend, d.h., $\mu' < 0$, so gilt $\int_{\gamma \circ \mu} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$.

- Besteht der ∂M Rand einer Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ aus stückweise stetig differenzierbaren Kurven, so schreibt man $\int_{\partial M} f(z) dz$ statt explizit den Rand zu parametrisieren. Dabei wird stillschweigend angenommen, dass der Rand gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Falls für eine Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, so heißt γ geschlossen. Zwei Wege, $\gamma, \delta : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$, mit gemeinsamen Endpunkten heißen *in U homotop*, falls eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ gibt, so dass $H(t, 0) = \gamma(t)$, $H(t, 1) = \delta(t)$ für alle $t \in [a, b]$ sowie $\gamma(a) = H(a, s) = \delta(a)$, $\gamma(b) = H(b, s) = \delta(b)$ für alle $s \in [0, 1]$. Salopp formuliert heißt das, dass die beiden Wege γ und δ innerhalb von U stetig ineinander deformierbar sind. Es ist dabei wichtig, dass alle 'Zwischenwege' $t \mapsto H(t, s)$ innerhalb der Menge U bleiben.

Satz von Cauchy 3.2.2. (für Rechtecke) Es sei $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ein achsenparalleles Rechteck, das in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ enthalten ist, und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Zusatz. Ist $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, $U(R) \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung von R und $\Psi : U(R) \rightarrow U_{\mathbb{C}}$ eine beliebige C^1 -Abbildung, dann gilt auch

$$\int_{\Psi(\partial R)} f(z) dz = 0 \quad \text{für jede holomorphe Funktion } f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$$

Idee des **Beweises** für $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$: Für die gegebene holomorphe Funktion f konstruiere man eine Folge von immer kleiner werdenden Rechtecken $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$ wie folgt: Man zerlege das Ausgangsrechteck R in 4 kongruente Rechtecke $R^{(1)}, \dots, R^{(4)}$. Da sich die Integration über Wegstücke innerhalb von R weghebt, gilt

$$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial R^{(1)}} f(z) dz + \int_{\partial R^{(2)}} f(z) dz + \int_{\partial R^{(3)}} f(z) dz + \int_{\partial R^{(4)}} f(z) dz$$

Es bezeichne R_1 dasjenige Rechteck aus $R^{(1)}, \dots, R^{(4)}$, für das $|\int_{\partial R^{(k)}} f(z) dz| = |\int_a^b f(\gamma^{(k)}(t)) \cdot \dot{\gamma}^{(k)}(t) dt|$ maximal ist. Dann gilt

$$\left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial R_1} f(z) dz \right|$$

Sukzessiv gewinnt man auf diesem Wege eine Folge der Rechtecke $R_k \subset R$ mit $|\int_{\partial R} f(z) dz| \leq 4^k |\int_{\partial R_k} f(z) dz|$, sowie $\text{diam}(R_k) = 2^{-k} \text{diam}(R)$ und $u(R_k) = 2^{-k} u(R)$ wobei $u(R_k)$ den Umfang des Rechtecks R_k bezeichnet. Wegen Kompaktheit von R und $\text{diam}(R_k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt $\bigcap R_k = \{z_0\}$. Da f in z_0 \mathbb{C} -differenzierbar ist, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z - z_0)$ mit $|r(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$ gilt. Wähle jetzt n groß genug, so dass $\text{diam}(R_n) < \delta$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f(z) dz \right| &\leq 4^k \left| \int_{\partial R_k} f(z) dz \right| = 4^k \left| \int_{\partial R_k} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z - z_0) \right| \leq \\ &\leq 4^k \int_{\partial R_k} |r(z - z_0)| |dz| \leq 4^k \varepsilon \int_a^b |\gamma_k(t) - z_0| \cdot |\dot{\gamma}_k(t)| dt \leq \\ &\leq 4^k \varepsilon 2^{-k} \text{diam}(R) \cdot 2^{-k} u(R) = \varepsilon \cdot \text{diam}(R) \cdot u(R) \end{aligned}$$

Dabei ist $\gamma_k : [a, b] \rightarrow \partial R_k \subset \mathbb{C}$ die stückweise stetig differenzierbare Kurve, die den Rand von R_k parametrisiert, und $\int_a^b |\dot{\gamma}_k(t)| dt$ die Länge des Weges γ_k , d.h., der Umfang von R_k . \square

Typische Beispiele für Bilder $\psi(\partial R)$ zeigen die folgende Beispiele:

- $\Psi : [r_1, r_2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto z_0 + x \cdot e^{-iy}$. Dann ist das Bild von $[r_1, r_2] \times [0, 2\pi]$ ein Kreisring $\overline{B}_{r_2}(z_0) \setminus B_{r_1}(z_0)$ oder die abg. Kreisscheibe $\overline{B}_{r_2}(z_0)$ falls $r_1 = 0$. Hier gilt es

$$\int_{\Psi(\partial R)} \dots = \int_{\partial B_{r_2}(z_0)} \dots - \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} \dots$$

- Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Kurven, so ist $\Psi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $(s, t) \mapsto (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$ eine C^1 -Abbildung, die den Rand des Rechteck R auf $\text{Spur}(\gamma_0)$, $\text{Spur}(\gamma_1)$ sowie die Abschnitte $\overline{\gamma_0(a)\gamma_1(a)}$ sowie $\overline{\gamma_0(b)\gamma_1(b)}$ abbildet.

Folgerungen aus dem Satz von Cauchy

In den folgenden Aussagen sei immer $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf ganz $U_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ \mathbb{C} -differenzierbare Funktion.

Cauchy-Formel 3.2.3. (für Kreisscheiben) Ist $\overline{B}_r(z_0) \subset U_{\mathbb{C}}$ so gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Lokale Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe 3.2.4. Für jede Kreisscheibe $\overline{B}_r(z_0) \subset U_{\mathbb{C}}$ gilt für alle $z \in B_r(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw$$

und der Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ist mindestens r . Es gilt die folgende Abschätzung

$$(3.2.5) \quad |c_k| \leq \frac{\|f\|_{\overline{B}_r(z_0)}}{r^k}$$

Theorem von Goursat 3.2.6. f ist ∞ -oft \mathbb{C} -differenzierbar auf $U_{\mathbb{C}}$.

Theorem von Liouville 3.2.7. Ist $U_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ und $|f| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschränkt, so muss f bereits konstant sein.

Theorem von Morera 3.2.8. Es sei $\varphi : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, so dass für jedes Dreieck $\Delta \subset U_{\mathbb{C}}$ $\int_{\partial\Delta} \varphi(z) dz = 0$ (äquivalent: für jedes Rechteck $R \subset U_{\mathbb{C}}$ $\int_{\partial R} \varphi(z) dz = 0$) gilt, dann ist φ holomorph auf $U_{\mathbb{C}}$

Unter einem Dreieck verstehen wir die abgeschlossene Fläche $\Delta = \Delta_{A,B,C} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, die durch beliebige nicht kollineare drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird.

Identitätssatz 3.2.9. Es sei (z_n) eine konvergente Folge von paarweise verschiedenen komplexen Zahlen mit $\lim z_n \in U_{\mathbb{C}}$. Gilt $f(z_n) = 0$ für alle n und ist $U_{\mathbb{C}}$ eine Gebiet (d.h., zusammenhängend), so folgt $f \equiv 0$. Insbesondere gilt für zwei holomorphe Funktionen $f, g : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, die in allen Punkten z_n übereinstimmen: $f = g$ auf $U_{\mathbb{C}}$.

Es sei ζ eine Nullstelle von f . Definiere die Verschwindungsordnung von f in ζ als

$$\text{ord}_{\zeta}(f) := \min\{k : f^{(k)}(\zeta) \neq 0\}$$

Ist $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in ζ eine Nullstelle von Ordnung 1 hat, so gibt es nach dem Satz über die Umkehrfunktion 1.4.14 eine offene Umgebung $V(\zeta) \subset U$, die vermöge h diffeomorph auf $B_{\rho}(0)$ abgebildet wird.

Vorbereitungssatz 3.2.10. Es sei ζ eine Nullstelle von f . Falls f nicht konstant ist, gilt $\text{ord}_{\zeta}(f) =: k < \infty$, und es existiert eine holomorphe Funktion h , die auf einer Umgebung $V(\zeta)$ von ζ definiert ist und in ζ von Ordnung 1 verschwindet (d.h., lokal biholomorph ist), so dass $f(z) = h(z)^k$ für alle $z \in V(\zeta)$ gilt.

Bemerkung. Aus dem Satz über die Umkehrfunktion folgt, dass man um ζ eine Umgebung $V_{\varepsilon} \subset U_{\mathbb{C}}$ findet, so dass $h : V_{\varepsilon} \rightarrow B_{\varepsilon}(0)$ ein Diffeomorphismus ist, der wegen 3.1.4 sogar biholomorph ist.

Satz über die Gebietstreue 3.2.11. Ist $U_{\mathbb{C}}$ eine Gebiet, so ist das Bild $f(U_{\mathbb{C}})$ ebenfalls ein Gebiet, vorausgesetzt dass f nicht konstant ist.

Maximumsprinzip 3.2.12. Hat $|f|$ in einem Punkt $z \in U_{\mathbb{C}}$ ein lokales Maximum, so ist f konstant auf $U_{\mathbb{C}}$, vorausgesetzt dass $U_{\mathbb{C}}$ zusammenhängend ist.

3.3. Isolierte Singularitäten und Laurent-Reihen

Definition 3.3.1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$. Man sagt, dass f in z_0

- eine *hebbare Singularität* besitzt, falls sich f zu einer auf ganz U holomorphen Funktion fortsetzen lässt, d.h., es gibt $\hat{f} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\hat{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$;
- eine *Polstelle* der Ordnung m falls in z_0 $(z - z_0)^m \cdot f(z)$, nicht jedoch $(z - z_0)^{m-1} \cdot f(z)$, eine hebbare Singularität besitzt.
- eine *wesentliche Singularität* besitzt, falls f in z_0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle hat.

Lemma 3.3.2. Es sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$, so dass für eine punktierte Kreisscheibe $B_r^\times(z_0) := B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$ die Einschränkung von $|f|$ auf B_r^\times beschränkt ist. Dann hat f in z_0 eine hebbare Singularität.

Lemma 3.3.3. Falls die holomorphe Funktion $f : U \setminus \{z_0\}$ in $z_0 \in U$ eine Polstelle der Ordnung m besitzt, so gibt es $h \in \mathcal{O}(U)$ mit $h(z_0) \neq 0$ mit

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}$$

Es gilt dann $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$

Eine holomorphe Funktion auf $B_r^\times(z_0)$, die in z_0 eine Polstelle hat lässt sich wegen $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ sicherlich nicht zu einer stetigen Funktion $B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ fortsetzen. Man kann jedoch den Wertebereich auf folgende Weise sinnvoll um einen Punkt, den sog. unendlich fernen Punkt, erweitern:

Konstruktion der Riemannschen Zahlenkugel. Die Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wird mit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ identifiziert in dem man \mathbb{C} mit $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ (Sphäre ohne Nordpol) identifiziert. Dazu verwendet man die stereographische Projektion von dem Nordpol aus:

$$\begin{aligned} \varphi : S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & (x, y, z) &\longmapsto \frac{x + iy}{1 - z} \\ \varphi^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{N\}, & w &\longmapsto \frac{(2 \operatorname{Re} w, 2 \operatorname{Im} w, |w|^2 - 1)}{1 + |w|^2} \end{aligned}$$

Die Menge S^2 , zusammen mit der Einschränkung der euklidischen Metrik in \mathbb{R}^3 ist ein metrischer Raum (die auf S^2 induzierte Metrik d nennt man *chordal*). Durch die Identifizierung von \mathbb{C} mit $S^2 \setminus \{N\}$ hat man auf $S^2 \setminus \{N\}$ holomorphe Koordinate eingeführt und der Nordpol $N = (0, 0, 1)$ wird dann mit dem unendlich fernen Punkt ∞ identifiziert, der nicht in $\varphi^{-1}(\mathbb{C})$ enthalten ist. Diese 2-dimensionale Sphäre mit den oben definierten Identifikationen nennt man die Riemannsche Zahlenkugel (oder Kugel) und bezeichnet mit $\overline{\mathbb{C}}$.

Definiert man mittels der Abbildung (konjugierte stereographische Projektion vom Südpol $S = (0, 0, -1)$ aus)

$$\begin{aligned} \psi : S^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{C}, & (x, y, z) &\longmapsto \frac{x - iy}{1 + z} \\ \psi^{-1} : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{S\}, & w &\longmapsto \frac{(2 \operatorname{Re} w, -2 \operatorname{Im} w, 1 - |w|^2)}{1 + |w|^2} \end{aligned}$$

eine weitere Karte (vgl. 1.4.13, wobei wir jetzt anstelle eines abstrakten Vektorraumes E die Menge S^2 benutzen und die Karten auf den Umgebungen $U_N := S^2 \setminus \{N\}$ sowie $U_S := S^2 \setminus \{S\}$ definieren), so wird jetzt $S^2 \setminus \{S\}$ mit \mathbb{C} identifiziert, und der unendlich ferner Punkt $\infty = N$ entspricht jetzt dem Nullpunkt in $\mathbb{C} = \psi(S^2 \setminus \{S\})$. Der Koordinatenwechsel $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gestalt $w \mapsto 1/w$, ist also eine biholomorphe Abbildung.

Die Konstruktion der Riemannschen Sphäre erlaubt jede holomorphe Abbildung $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$, die in z_0 eine Polstelle hat, d.h., $f(z) := h(z)/(z - z_0)^m$, als eine stetige, sogar holomorphe Abbildung $\hat{f} : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ aufzufassen. Hierbei $\hat{f}(z) := \begin{cases} \varphi^{-1} \circ f(z) & \text{falls } z \neq z_0 \\ N & \text{falls } z = z_0 \end{cases}$. Die Holomorphie von \hat{f} in dem

Punkt z_0 bedeutet, dass die Abbildung $\psi \circ \hat{f}$, in unserem Fall durch $u \mapsto (u - z_0)^m/h(u)$ gegeben, holomorph in einer Umgebung von z_0 ist. Die oben konstruierte Riemannsche Sphäre ist ein Beispiel einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $g : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist definitionsgemäß holomorph, wenn die entsprechenden Abbildungen $\psi \circ g$ und $\varphi \circ g$ mit Werten in \mathbb{C} holomorph in dem üblichen Sinne sind.

Von nun an werden wir den Punkt $N \in S^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$ mit ∞ bezeichnen.

Definition 3.3.4. Eine stetige Abbildung $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, für die $f^{-1}(\infty)$ eine diskrete Teilmenge von U ist, so dass $f : U \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ holomorph ist, und in jedem Punkt aus $f^{-1}(\infty)$ eine Polstelle vorliegt, eine *meromorphe Funktion*.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ bilden eine Körper.

Die holomorphen Funktionen $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ $z \mapsto \exp(-1/z)$, $\sin(1/z)$ besitzen in 0 wesentliche Singularitäten.

Satz von Weierstraß-Caserati 3.3.5. Besitzt $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ in z_0 eine wesentliche Singularität, so ist für jedes $\varepsilon > 0$ das Bild $f(B_\varepsilon^\times(z_0))$ dicht in \mathbb{C} .

Es gibt sogar die folgende Verschärfung dieser Aussage, bekannt als der Satz von Picard: *Das Bild $f(B_\varepsilon^\times(z_0))$ für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ stimmt bis auch höchstens einen Ausnahmepunkt mit ganz \mathbb{C} überein.*

Definition 3.3.6. Eine *Laurentreihe* mit dem Entwicklungspunkt z_0 ist der Ausdruck

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

wobei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$ der *Hauptteil* und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ der *Nebenteil* der Laurentreihe heißt. Um das Konvergenzverhalten zu klären, sei $1/r$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}w^k$ und R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

lokal gleichmäßig (normal) auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0)$ gegen eine holomorphe Funktion $f_- : \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ lokal gleichmäßig (normal) auf $B_R(z_0)$ gegen die holomorphe Funktion $f_+ : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$. Gilt $0 \leq r < R$, so sagen wir, dass die Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ auf dem Kreisring $K := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ konvergiert. In diesem Fall definiert die Laurentreihe eine holomorphe Funktion auf K , welche per definitionem die Summe der durch den Hauptteil und durch den Nebenteil definierten holomorphen Funktionen, also $f_- + f_+$, ist. Ist der Hauptteil einer Laurentreihe 0, so handelt sich bei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ um eine gewöhnliche Potenzreihe.

Entwicklungssatz II 3.3.7. Es sei f eine in einem Kreisring $K := \{r < |z - z_0| < R\}$ holomorphe Funktion. Dann gibt es für alle $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$, so dass die Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$$

auf K gegen f konvergiert. Es gilt ferner

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

für alle ρ mit $r < \rho < R$.

Lemma 3.3.8. Es sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ die Laurentreihe einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(B_R^\times(z_0))$. Dann besitzt f eine hebbare Singularität in z_0 genau dann wenn der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet. f besitzt in z_0 einen Pol der Ordnung m genau dann wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -m$. Ferner hat f in z_0 eine wesentliche Singularität genau dann wenn unendlich viele der Koeffizienten a_k mit $k \in -\mathbb{N}$ nicht verschwinden.

Definition 3.3.9. Es sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Kurve, $\tau \in [a, b]$ und $B_r(\gamma(\tau))$ eine Kreisscheibe. Wir schreiben I_τ für das maximale in $[a, b]$ offene Teilintervall $I_\tau \subset [a, b]$, für das $\gamma(I_\tau) \subset B_r(\gamma(\tau))$ und $\tau \in I_\tau$ gilt.

Eine *Kreiskette auf einer stetigen Kurve* $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ besteht aus einer Unterteilung $a = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n+1} = b$ sowie den offenen Kugeln $B_{r_j}(\gamma(\tau_j)) \subset \mathbb{C}$, so dass die Intervalle $I_{\tau_1}, \dots, I_{\tau_{n+1}}$ die Ketteneigenschaft $I_{\tau_j} \cap I_{\tau_{j+1}} \neq \emptyset$ für alle $j \in \{1, \dots, n+1\}$ haben.

Falls $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge ist und alle Kreisscheiben $B_{r_j}(\gamma(\tau_j))$ in U enthalten sind, so sprechen wir von einer *Kreiskette auf einer stetigen Kurve γ in U* .

Definition 3.3.10. Es sei jetzt $\mathcal{K} := (\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ eine Kreiskette auf einer stetigen Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $f := f_1 \in \mathcal{O}(B_{r_1}(\gamma(\tau_1)))$. Eine analytische Fortsetzung von f entlang der Kreiskette \mathcal{K} besteht aus holomorphen Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(B_{r_j}(\gamma(\tau_j)))$ für alle j , so dass

$$f_j|_{B_{r_j}(\gamma(\tau_j)) \cap B_{r_{j+1}}(\gamma(\tau_{j+1}))} = f_{j+1}|_{B_{r_j}(\gamma(\tau_j)) \cap B_{r_{j+1}}(\gamma(\tau_{j+1}))}$$

für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Jede Familie von holomorphen Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(B_{r_j}(\gamma(\tau_j)))$, die die obige Bedingung erfüllen, nennen wir eine analytische oder holomorphe Fortsetzung (von f_1) entlang \mathcal{K} .

Definition 3.3.11. Homotopie von Kurven Es sei (X, d) ein metrischer Raum und γ_0, γ_1 zwei stetige Kurven $[a, b] \rightarrow X$. Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ sowie $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, so nennt man γ_0 und γ_1 *homotop in X* falls es eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ sowie $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$ gibt. Die Abbildung H nennt man eine *Homotopie* zwischen γ_0 und γ_1 . Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ heißt *nullhomotop*, falls γ homotop zu der konstanten Kurve $[a, b] \rightarrow \{\gamma(a)\} \subset X$ ist.

Lemma 3.3.12. Es seien zwei Kreisketten $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ und $(\gamma, \tau'_j, B'_{r'_j})$ auf der gleichen Kurve γ und zwei analytischen Fortsetzungen: (f_j) entlang $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ und (g_j) entlang $(\gamma, \tau'_j, B'_{r'_j})$, gegeben. Gilt $f|_{B_\rho(\gamma(a))} = g|_{B_\rho(\gamma(a))}$ für ein hinreichend kleines ρ so gilt auch $f_n = g_n$ auf einer kleinen Umgebung von $\gamma(b)$.

Wir sagen daher, dass eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(B_{r_1}(\gamma(a)))$ längst γ holomorph fortsetzbar ist, falls es irgendeine Kreiskette auf γ , und eine analytische Fortsetzung (f_j) längst dieser Kreiskette gibt.

Lemma 3.3.13. Es seien $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ eine Kreiskette auf $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $(\delta, \tau'_j, B'_{r'_j})$ eine Kreiskette auf $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sowie zwei analytischen Fortsetzungen: (f_j) entlang $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ und (g_j) entlang $(\delta, \tau'_j, B'_{r'_j})$, gegeben. Es wird ferner angenommen, dass $h := f|_{B_\rho(\gamma(a))} = g|_{B_\rho(\gamma(a))}$ für ein hinreichend kleines $\rho > 0$ gilt. Sind γ und δ homotop mit der Homotopie $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und ist h holomorph fortsetzbar entlang $t \mapsto H(t, s)$ für jedes $s \in [0, 1]$ so gilt auch $f_n = g_n$ auf einer kleinen Umgebung von $\gamma(b) = \delta(b)$.

Lemma 3.3.14. Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma : I \rightarrow U$ eine beliebige stetige Kurve. Dann hat f eine Stammfunktion F_γ entlang γ , d.h., es existiert eine analytische Fortsetzung (F_j) entlang einer Kreiskette $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ auf γ , so dass $F'_j(z) = f(z)$ auf $B_{r_j}(\gamma(\tau_j))$ für alle j gilt.

Motiviert durch die Tatsache, dass für eine (stückweise) differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ sowie $f \in \mathcal{O}(U)$ das Integral $\int_\gamma f(z) dz$ durch $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ ausgedrückt werden kann, vorausgesetzt, dass F eine Stammfunktion von f auf U ist, definieren wir jetzt für eine bloß stetige Kurve $\gamma : I \rightarrow U$

$$\int_\gamma f(z) dz := F_\gamma(\gamma(b)) - F_\gamma(\gamma(a))$$

Hierbei ist F_γ eine Stammfunktion von f entlang γ wie in 3.3.14 Hiermit erhält man die folgende Verschärfung des Satzes von Cauchy:

Theorem 3.3.15. Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma, \delta : I \rightarrow U$ zwei in U homotope Kurven. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\delta} f(z) dz$$

Integralformel von Cauchy in der Umlaufzahlversion 3.3.16. Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma : I \rightarrow U$ eine in U nullhomotope stetige (geschlossene) Kurve. Dann gilt für jedes $a \in U$, welches nicht auf $\gamma(I)$ liegt:

$$v_{\gamma}(a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Herbei bezeichnet $v_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ die Umlaufzahl der geschlossenen Kurve γ um den Punkt a . Sie läßt sich auch anschaulicher als die Differenz $(\theta_{\gamma}(b) - \theta_{\gamma}(a))/2\pi$ definieren, wobei $\theta_{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, für die

$$\exp(i\theta_{\gamma}(t)) = \frac{\gamma(t) - a}{|\gamma(t) - a|} \quad \forall t \in I$$

gilt.

Definition 3.3.17. Es sei c eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(B_r^{\times}(c))$ und $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k(z-c)^k$ ihre Laurentreihe. Dann heisst

$$\text{Res}_c(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\varepsilon}(c)} f(\zeta) d\zeta = a_{-1}$$

das *Residuum* von f an der Stelle c .

Residuensatz 3.3.18. Es sei $S \subset U$ eine diskrete Teilmenge, die die isolierten Singularitäten einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus S)$ enthält. Falls $\gamma : I \rightarrow U \setminus S$ eine stetige geschlossene Kurve ist, die in U nullhomotop ist, so gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in S} v_{\gamma}(s) \cdot \text{Res}_s(f).$$

Insbesondere ist die Summe auf der rechten Seite endlich.

Anwendungen.

• Es sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, $\deg Q \geq \deg P + 2$ und $R(x)$ hat keine Polstellen auf der reellen Achse. dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t) dt = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}_c(R)$$

• Es sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, $\deg Q \geq \deg P + 1$ und $R(x)$ hat keine Polstellen auf der reellen Achse. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{it} dt = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}_c(R(z) \cdot e^{iz})$$

Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$ schreiben wir

Def.
$$HW \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^{\infty} f(x) dx \right)$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Die einzelnen Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f(x) dx$ sowie $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^{\infty} f(x) dx$ brauchen nicht zu existieren.

• Es sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, $\deg Q \geq \deg P + 1$ und $R(t)$ habe an den Stelle $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ Polstellen der Ordnung 1. Dann gilt

$$HW \int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{it} dt = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}_c(R(z) \cdot e^{iz}) + \pi i \sum_{b_j} \operatorname{Res}_{b_j}(R(z) \cdot e^{iz})$$

• Es sei $r(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} r(\cos(x), \sin(x)) dx = \frac{1}{i} \int_{\partial B_1(0)} r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z}$$

3.4. Harmonische Funktionen und Poisson-Integrale

Wie üblich identifizieren wir \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 via $z = x + iy \mapsto (x, y)$. Bezeichnen x, y die lineare Koordinatenfunktionen und $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ die entsprechenden partiellen Ableitungsoperatoren, so definieren wir die komplexen Differentialoperatoren 1. Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Eine C^1 Funktion $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C} (= \mathbb{R}^2)$ ist genau dann holomorph auf $U_{\mathbb{C}}$ wenn $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \equiv 0$ gilt. Analog nennen wir eine C^1 -Funktion $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ *antiholomorph* falls $\frac{\partial}{\partial z} f \equiv 0$ auf U gilt.

Der (euklidische) Laplaceoperator auf \mathbb{R}^2 kann dann in der form

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

geschrieben werden. Er definiert eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $C^k(U) \rightarrow C^{k-2}(U)$, $k \geq 2$. Zur Erinnerung: $f \in C^2(U)$ heißt harmonisch, falls $\Delta f \equiv 0$ auf U . Man sieht dann sofort, dass holomorphe Funktionen, wie auch deren Real- und Imaginärteile harmonisch sind. Der folgende Satz gibt eine explizite Konstruktion harmonischer Funktionen.

Theorem 3.4.1. *Es sei $R > 0$, $a \in \mathbb{C}$ und $\varphi : \partial B_R(a) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist*

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{Re^{it} + z - a}{Re^{it} - z + a} \right) \varphi(a + Re^{it}) dt, \quad , z \in B_R(a)$$

harmonisch auf der Kreisscheibe $B_R(a)$. Ferner gilt

$$\lim_{z \rightarrow Re^{is}} \Phi(z) = \varphi(Re^{is}) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Den Ausdruck

$$P_{R,a}(z, t) := \operatorname{Re} \left(\frac{Re^{it} + z - a}{Re^{it} - z + a} \right)$$

nennt man die *Poissonsche Kernfunktion*.

Mittelwerteigenschaft. Man kann leicht zeigen, dass für harmonische Funktionen $f \in C^2(U)$ die Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{re^{it} + z - a}{re^{it} - z + a} \right) f(re^{it} + a) dt$$

für jede Kreisscheibe $B_r(a)$ mit $\bar{B}_r(a) \subset U$ gilt. Insbesondere also

$$(3.4.2) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + a) dt.$$

Man sagt auch, dass f die Mittelwerteigenschaft hat. Überraschenderweise ist das hinreichend um harmonische Funktionen zu charakterisieren:

Lemma 3.4.3. *Es sei $f \in C^2(U)$. Gibt es für jedes $a \in U$ ein $R_a > 0$ mit $B_{R_a}(a) \subset U$, so dass für alle $r < R_a$ die Bedingung 3.4.2 erfüllt ist, so ist f harmonisch.*

Es ist nützlich die folgende Verallgemeinerung der harmonischen Funktionen zu betrachten.

Definition 3.4.4. (Oberhalbstetige Funktionen) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ nennt man *oberhalbstetig*, falls für alle $a \in X$ die Ungleichung

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{B_{1/n}(a) \setminus a} f(x) \right) \leq f(a) \quad \text{erfüllt ist.}$$

Definition 3.4.5. (Subharmonische Funktionen) Es sei $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ oberhalbstetig, so dass auf keiner Zusammenhangskomponente von U $f \equiv -\infty$ gilt. Gilt ferner noch

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + a) dt$$

für alle Kreisscheiben $\bar{B}_r(a)$, die in $U_{\mathbb{C}}$ enthalten sind, so nennt man f *subharmonisch*.

Bemerkung 3.4.6.

- Um die Subharmonizität einer oberhalbstetigen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ nachzuweisen, reicht es für jedes $a \in U$ ein (kleines) $R_a > 0$ zu finden, so dass die Ungleichung aus 3.4.5 bloß für alle $r < R_a$ gilt.
- Gilt $f \in C^2(U)$, so ist f subharmonisch genau dann, wenn $\Delta f \geq 0$ gilt.

Definition 3.4.7. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Teilmenge. Wir sagen, dass eine oberhalbstetige Funktion $f : U_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ das (*strikte*) *Maximumsprinzip* erfüllt, wenn die folgende Bedingung erfüllt:

- entweder besitzt f in keinem Punkt aus U ein lokales Maximum, oder aber
- ist f konstant.

Falls $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Teilmenge ist, so erfüllt eine oberhalbstetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ das (*strikte*) Maximumsprinzip genau dann wenn die Einschränkungen $f|_{U^\circ}$ auf jede Zusammenhangskomponente U° von U die obige Bedingung erfüllt.

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$, U offen, erfüllt genau dann das Maximumsprinzip wenn für jede relativkompakte und zusammenhängende Teilmenge $W \subset U$ die Abschätzung

$$f(z) < \sup_{\partial W} f(w) \quad \text{für alle } z \in W$$

gilt, insofern f nicht auf der W enthaltenden Zusammenhangskomponente U^W von U konstant ist.

Proposition 3.4.8.

i. Es sei $f : U_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine oberhalbstetige Funktion. Gibt es für jedes $a \in U_{\mathbb{C}}$ ein $R_a > 0$, so dass

$$(3.4.9) \quad f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + a) dt .$$

für alle $r < R_a$ erfüllt ist, so gilt für f das Maximumsprinzip. Insbesondere ist gilt das Maximumsprinzip für jede subharmonische Funktion f .

ii. Es sei $f \in C^2(U_{\mathbb{R}^n})$. Gilt $\Delta f \geq 0$ so erfüllt f das Maximumsprinzip.

Typische Anwendungen des Maximumsprinzips: Es sei $V \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und relativkompakt.

- Sind $f, g \in C^0(\bar{V})$ zwei harmonische Funktionen, die auf ∂V übereinstimmen, so gilt schon $f = g$ auf \bar{V} . (Wende das Maximumsprinzip auf $f - g$, $g - f$ und 0 an)

- Ist $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subharmonisch (d.h. oberhalbstetig auf \bar{V} und subharmonisch auf V) sowie $h : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch mit $f \leq h$ auf ∂V so gilt $f \leq h$ auf ganz \bar{V} . (Wende das Maximumsprinzip auf $f - h \leq 0$ an). Insbesondere folgt daraus, dass eine oberhalbstetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ genau dann subharmonisch ist, wenn für jede relativkompakte Teilmenge $W \subset U$ (d.h., $W \subset \bar{W} \subset U$, \bar{W} kompakt, vgl. 1.3.5) sowie jede harmonische Funktion $h \in C^0(\bar{W})$ mit $h \geq f$ auf ∂W , die Ungleichung

$$h(z) \geq f(z) \quad \text{für alle } z \in \bar{W} \quad \text{erfüllt ist.}$$

Dirichletsches Randwertproblem. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte offene Teilmenge und φ eine stetige Funktion auf dem Rand ∂U . Gibt es eine auf \bar{U} stetige Funktion Φ , die am Rand mit φ übereinstimmt und auf U harmonisch ist? In dem Spezialfall $U = B_R(a)$ gibt der Satz 3.4.1 eine affirmative Antwort auf diese Frage. Die Lösung ist auch eindeutig. Eine solche eindeutige Lösung existiert auch für viel allgemeinere Gebiete. Man kann zeigen, dass für jedes Gebiet $U \subset \mathbb{C}$, dessen Rand ∂U die Bedingung [PP] erfüllt, das Dirichletsche Randwertproblem (für harmonische Funktionen) eine eindeutige Lösung besitzt. Dabei läßt sich die Bedingung [PP] folgendermaßen formulieren:

Für jedes $p \in \partial U$ gibt es eine stetige Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(a, b) \cap \bar{U} = \emptyset$.

Insbesondere erfüllt jedes Gebiet mit stückweise differenzierbarem Rand die Bedingung [PP].

Die Konstruktion der Funktion Φ läßt sich folgendermaßen bewerkstelligen: Ist $\varphi \in C^0(\partial U)$ gegeben, so konstruiere man die Perronsche Familie

$$\mathfrak{P}_\varphi := \left\{ f \in C^0(U) : f \text{ subharmonisch, } \forall p \in \partial U \limsup_{z \rightarrow p} f(z) \leq \varphi(p) \right\}$$

Dann ist $\Phi(z) := \sup_{f \in \mathfrak{P}_\varphi} f(z)$ die gesuchte harmonische Funktion.

Die nächste Proposition klärt die Frage, unter welchen Bedingungen die in 3.4.1 konstruierte Funktion Φ holomorph auf der entsprechenden Kreisscheibe ist. Der Einfachheit halber schreiben wir $S := \partial B_1(0)$ für den Rand der Einheitskreisscheibe.

Proposition 3.4.10. Es sei $\varphi \in C^0(S)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- $\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) e^{int} dt = 0 \quad \forall n \geq 0$
- $\int_0^{2\pi} \frac{e^{-it} + z}{e^{-it} - z} \varphi(e^{it}) dt = 0$
- $F(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) \varphi(e^{it}) dt$ ist eine stetige Fortsetzung von φ auf die Kreisscheibe $\bar{B}_1(0)$, die holomorph auf $B_1(0)$ ist und in 0 verschwindet.

4. Lebesguesche Integrationstheorie

4.1. Maßtheorie

Um den Riemannsches Integrationsbegriff auf eine größere Klasse von Funktionen (als die bloß Riemann-integrierbaren) auszudehnen ersetzt man die Intervalle (bzw deren Längen) in den klassischen Riemannsches Summen $\sum_{\text{endlich}} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \sum_{\text{endlich}} c_j |x_j, x_{j+1}|$ durch Summen der Gestalt $\sum_{\text{endlich}} c_j |A_j|$, wobei $A_1 \cup \dots \cup A_n$ eine disjunkte Zerlegung eines Intervalls $[a, b]$ in gewisse Teilmengen A_j ist. Damit könnte man der Treppenfunktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf jedem A_j den konstanten Wert c_j annimmt, das Integral $\int g = \sum_{\text{endlich}} c_j |A_j|$ zuweisen. Ein Problem dabei ist es, für eine allgemeine, "komplizierte" Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ den "richtigen" Inhalt $|A|$ zu definieren. In diesem Abschnitt befassen wir uns eingehend mit dem Messen und überhaupt mit der Messbarkeit von Teilmengen in \mathbb{R}^n (oder allgemeiner: X).

Definition 4.1.1. Es sei X eine beliebige Menge. Eine σ -Algebra \mathcal{A} auf der Menge X ist eine Familie von Teilmengen von X (d.h., $\mathcal{A} \subset 2^X$) die die folgenden Bedingungen erfüllen.

- i $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
- iii $A_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Ist $\mathcal{E} \subset 2^X$ eine beliebige Teilmenge, so schreibt man $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ für die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält. Man nennt dann \mathcal{E} ein Erzeugersystem für die σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$. So z.B. für einen topologischen Raum (X, \mathcal{T}) nennt man die durch alle offenen Teilmengen erzeugte σ -Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T}) \subset 2^X$ die *Borelsche σ -Algebra* \mathcal{B}_X .

Definition 4.1.2. Es sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ eine σ -Algebra auf X . Ein (positives) *Maß* ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$, die die folgenden Bedingungen genügt:

M1 $\mu(\emptyset) = 0$

M2 Für jede Folge von paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \sigma\text{-Additivität}$$

Bemerkung 4.1.3.

- Gilt $\mu(X) < \infty$ so heißt μ *endlich*.
- Gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ und $\mu(Y_n) < \infty \forall n$ so heißt μ *σ -endlich*.
- Das Paar (X, \mathcal{A}) , wobei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X ist, nennt man einen *Messraum*. Das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) , wobei μ ein Maß auf einer σ -Algebra ist, heißt ein *Maßraum*.
- Wir nennen $N \subset X$ eine μ -Nullmenge falls es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \supset N$ und $\mu(A) = 0$ gibt. I.A. N ist kein Element in \mathcal{A} .
- Ein Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) heißt *vollständig* falls jede μ -Nullmenge N in \mathcal{A} liegt. Jeder Maßraum läßt sich zu einem vollständigen Raum erweitern.
- Ersetzt man in M2 die σ -Additivität von μ durch die bloße (endliche) Additivität

$$\text{A2} \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^m A_n\right) = \sum_{n=1}^m \mu(A_n) \quad \text{für ein } m \geq 2$$

so nennt man ein solches μ ein *Inhalt*.

Definition 4.1.4. Ein *äußeres Maß* auf einer Menge X ist eine Abbildung $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

OM1 $\mu^*(\emptyset) = 0$

OM2 Für jede Folge $A_n \in 2^X$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \quad \sigma\text{-Subadditivität}$$

OM3 Für alle Teilmengen mit $A \subset B$ folgt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ *Monotonizität*

Es sei angemerkt, dass die Bedingung (M1) die Monotonizität automatisch impliziert, nicht jedoch (OM1). Im Falle eines äußeren (bzw. subadditiven) Maßes muss daher die Monotonizität gesondert gefordert werden.

Bemerkung zu den Summen $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Die Summanden in den in der Maßtheorie auftretenden Reihen sind nicht negativ. Wir erweitern daher ein wenig den Begriff der Konvergenz solcher Reihen und definieren:

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \sup_M \left\{ \sum_{j \in M} a_j, M \subset \mathbb{N} \text{ endlich} \right\} \in [0, +\infty]$$

Wir lassen hierbei zu, dass neben der im klassischen Sinne konvergenten Reihen $\sum a_k \in \mathbb{R}$ auch der Fall $\sum a_k = +\infty$ auftreten kann. Definitionsgemäß ist das genau dann der Fall, falls die endlichen Summen aus (*) unbeschränkt sind. In diesem verallgemeinerten Sinne ist jede Reihe (mit nichtnegativen Summanden) konvergent; z.B. konvergiert die harmonische Reihe gegen $+\infty$. Für alle solche positiven Summen gilt auch der Umordnungssatz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)}$ wobei $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion ist.

Beispiel Verallgemeinernd den Begriff eines (abgeschlossenen, halb abgeschlossenen etc.) Intervalls $[a, b]$, $[a, b)$ etc. in \mathbb{R} schreiben wir für beliebige Vektoren $a = \vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $b = \vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j \forall j$:

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad [a, b) := [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n), \quad \text{etc.}$$

Wir definieren deren Inhalt (Volumen) durch $|[a, b]| = |[a, b]| = |[a, b]| = |(a, b)| := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. Die folgende Konstruktion ist fundamental:

Die Abbildung $\lambda^* : 2^{\mathbb{R}^n} \rightarrow [0, +\infty]$, definiert durch

$$\lambda^*(Z) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\text{abzählbar}} |[a_k, b_k]| : Z \subset \bigcup_k [a_k, b_k] \right\}$$

ist ein äußeres Maß auf \mathbb{R}^n , das sog. *Lebesguesche* äußere Maß.

Definition 4.1.5. Es sei $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ ein äußeres Maß. Eine Teilmenge $A \subset X$ nennt man μ^* -messbar falls für jede Teilmenge $Z \subset X$ die Gleichung

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c) \quad \text{gilt.}$$

Da μ^* per definitionem subadditiv ist, ist A genau dann μ^* -messbar falls

$$\mu^*(Z) \geq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap A^c) \quad \text{für alle } Z \subset X$$

gilt.

Theorem 4.1.6. Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge X , dann ist die Menge \mathcal{M} aller μ^* -messbaren Mengen eine σ -Algebra. Die Einschränkung von μ^* auf \mathcal{M} ist ein Maß.

Proof:

- “ $\emptyset \in \mathcal{M}$, Vollständigkeit” Falls $\mu^*(A) = 0$ ist, so ist $A \in \mathcal{M}$, denn die Subadditivität impliziert dann

$$\mu^*(A \cap Z) + \mu^*(A^c \cap Z) \leq \mu^*(A) + \mu^*(Z) = \mu^*(Z)$$

Es ist also insbesondere $\emptyset \in \mathcal{M}$.

- “ $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ ” folgt sofort aus der Symmetrie der Definition
- “ $A_1, A_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$.” denn

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(A_1 \cap Z) + \mu^*(A_1^c \cap Z) \\ &= \mu^*(A_1 \cap Z) + \mu^*(A_1^c \cap Z \cap A_2) + \mu^*(A_1^c \cap Z \cap A_2^c) \\ &\geq \mu^*(Z \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(Z \cap (A_1 \cup A_2)^c) \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Messbarkeit von A_1 , die zweite aus der Messbarkeit von A_2 .

- “ $A_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, $Z \subset X$ beliebig $\Rightarrow \mu^*(Z \cap \bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap A_j)$ ”: Definiere $B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\mu^*(Z \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap A_j).$$

Beweis durch Induktion über n : Der Fall $n = 1$ ist klar. Wegen (3) ist B_n messbar, also gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \cap B_{n+1}) &= \mu^*(Z \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(Z \cap B_{n+1} \cap B_n^c) \\ &= \mu^*(Z \cap B_n) + \mu^*(Z \cap A_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \mu^*(Z \cap A_j). \end{aligned}$$

- Es gilt $\mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_j)$, $A_j \in \mathcal{N}$, $Z \subset X$

da einerseits $\mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) \geq \mu^*(Z \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap A_j)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und die umgekehrte Ungleichung aus der σ -Subadditivität von μ^* folgt.

- “ $A_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ ”:

Um das zu sehen, schreiben wir zunächst $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ als disjunkte Vereinigung. Sei

$$\tilde{A}_1 := A_1, \quad \tilde{A}_2 := A_2 \setminus A_1, \quad \tilde{A}_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \quad \dots$$

dann sind die \tilde{A}_j messbar (da $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$) und $\bigcup_{j=1}^n \tilde{A}_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Also gilt für beliebiges $Z \subset X$

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*(Z \cap \bigcup_{j=1}^n A_j) + \mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^n A_j)^c) \\ &\geq \mu^*(Z \cap \bigcup_{j=1}^n \tilde{A}_j) + \mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu^*(Z \cap \tilde{A}_j) + \mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c) \end{aligned}$$

und für $n \rightarrow \infty$

$$\mu^*(Z) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap \tilde{A}_j) + \mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c) = \mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)) + \mu^*(Z \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c).$$

□

Wir werden die folgenden Abkürzungen verwenden:

- $A_n \nearrow X$ für eine aufsteigende Folge von Teilmengen $A_n \subset X$ mit $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ sowie $\bigcup A_n = X$
- $f_n \nearrow f$ für eine monoton wachsende Folge von Funktionen $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die punktweise gegen f konvergiert.

Zur Frage der Eindeutigkeit erwähnen wir die folgende Aussage:

Lemma 4.1.7. *Es sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X und \mathcal{I} ein \cap -stabiles Erzeugerzsystem von $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{I})$, in welchem eine Folge von Elementen $I_n \in \mathcal{I}$ mit $I_n \nearrow X$ existiert. Sind μ und λ zwei Maße auf \mathcal{A} , für die*

$$\mu(A) = \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{I} \quad \text{und} \quad \mu(I_n) = \lambda(I_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt,}$$

so sind λ und μ bereits gleich auf \mathcal{A} .

Angewendet auf das äußere Lebesguesche Maß λ^* auf \mathbb{R}^n folgern wir, dass λ^* eine eindeutige Fortsetzung des Elementarinhaltes $|[\vec{a}, \vec{b}]| = \lambda^*([\vec{a}, \vec{b}])$ zu einem Maß auf der σ -Algebra aller Borelschen Teilmengen $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ induziert. Ferner enthält die σ -Algebra aller λ^* -messbaren (= Lebesgue-messbaren) Teilmengen die σ -Algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

4.2. Integration

Definition 4.2.1. Es seien (X, \mathcal{A}_X) und (Y, \mathcal{A}_Y) zwei Messräume sowie $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt *messbar* falls $\forall B \in \mathcal{A}_Y \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X$ gilt.

Bemerkung 4.2.2. Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_Y$ ein Erzeuger von \mathcal{A} , d.h. $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_Y$, dann ist $f : X \rightarrow Y$ genau dann \mathcal{A}_X - \mathcal{A}_Y -messbar wenn $\forall S \in \mathcal{S} \quad f^{-1}(S) \in \mathcal{A}_X$ gilt.

Um umständliche Formulierungen zu vermeiden erweitert man \mathbb{R} um zwei weitere Punkte: $-\infty$ und $+\infty$, schreibt $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, läßt $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen zu und vereinbart im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie die folgenden 'Rechenregel':

$$\begin{aligned} -\infty < a < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ a + \infty = \infty + a &:= \infty \quad \forall -\infty < a \leq \infty \\ a - \infty = -\infty + a &:= -\infty \quad \forall -\infty \leq a < \infty \\ \pm\infty \cdot a = a \cdot (\pm\infty) &:= \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ \mp\infty & \text{falls } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dagegen bleibt der Ausdruck $\infty - \infty$ oder $-\infty + \infty$ nicht definiert. Wir schreiben abkürzend $\{f \leq g\}$ für $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$, $\{f > g\}$ für $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ etc. Auf der Menge $\overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die folgende σ -Algebra: $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{C \subset \overline{\mathbb{R}} : C \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$

Lemma 4.2.3. *Eine Funktion $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ ist genau dann messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:*

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \{f < \lambda\} \in \mathcal{A}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \{f \leq \lambda\} \in \mathcal{A}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \{f > \lambda\} \in \mathcal{A}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \{f \geq \lambda\} \in \mathcal{A}$

Sind weiter $f, g, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare Abbildungen, so sind auch $f \cdot g$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ $\liminf_n f_n$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar, insofern der letzte (punktweise) Grenzwert existiert. Ist $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ überall auf X definiert (d.h. die Ausdrücke vom Typ $\infty - \infty$ kommen nicht vor), so ist auch diese lineare Kombination \mathcal{A} - $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ messbar.

Definition 4.2.4. Eine Treppenfunktion nennen wir jede messbare Funktion $(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt. Die Menge aller nicht negativen Treppenfunktionen bezeichnen wir mit \mathcal{E}_X^+ .

Jede Treppenfunktion hat (mindestens) eine Darstellung der Gestalt $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \chi_{A_k}$ wobei $\alpha_k \in \mathbb{R}$, A_k gewissen messbare Teilmengen von X sind und χ_C die Indikatorfunktion einer Teilmenge $C \subset X$ bezeichnet. Eine solche Darstellung von u nennt man *normal*, falls alle auftretende Teilmengen $A_k \subset X$ paarweise disjunkt sind.

Beginnend mit dem einfachen Fall der Treppenfunktionen in \mathcal{E}^+ erweitern wir sukzessiv den Begriff des Lebesgueschen Integrals für (fast beliebige) numerische Funktionen.

Definition 4.2.5. (Integral für nicht negative Treppenfunktionen) Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, $u \in \mathcal{E}_X^+$ und $u = \sum \alpha \cdot \chi_{A_k}$ eine normale Darstellung von u . Dann ist die Summe $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$ unabhängig von der Wahl der normalen Darstellung von u und heißt das *L-Integral* von u :

$$\int u \, d\mu := \int u(x) \, d\mu(x) := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

Der Grenzwert $\lim u_n$ von monoton steigenden Treppenfunktion aus \mathcal{E}^+ ist zwar messbar aber i.A. keine Treppenfunktion mehr. Überraschenderweise läßt sich jede messbare Funktion $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ als ein Grenzwert $u_n \nearrow f$ von Funktionen aus \mathcal{E}_X^+ schreiben: Für ein vorgegebenes f konvergiert die Folge von Treppenfunktionen $g_n : X \rightarrow [0, +\infty)$, definiert durch

$$g_n(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{falls } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \text{ mit } k \in \mathbb{N}, k \leq n \cdot 2^n \\ n & \text{falls } f(x) \geq n \end{cases}$$

monoton wachsend gegen f . Der Raum $\overline{\mathcal{E}_X^+}$ aller monotoner Grenzwerte von positiven Treppenfunktionen stimmt mit der Menge aller messbaren und nichtnegativen numerischen Funktionen überein. Das führt zu der

Definition 4.2.6. (Integral für nicht negative messbare Funktionen) Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ messbar und $u_n \in \mathcal{E}_X^+$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $u_n \nearrow f$. Dann ist der Ausdruck

$$\int f \, d\mu := \sup_n \int u_n \, d\mu$$

unabhängig von der Wahl der Folge mit $u_n \nearrow f$ und heißt das *Lebesguesche Integral* von f

Den Fall $\int f \, d\mu = +\infty$ lassen wir hier explizit zu.

Die Wohldefiniertheit des obigen Integrals folgt aus dem folgenden

Hilfslemma 4.2.7. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, (u_n) eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen aus \mathcal{E}_X^+ sowie $v \in \mathcal{E}_X^+$. Gilt $v(x) \leq \sup_n u_n(x)$ für alle $x \in X$ so folgt:

$$\int v \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu$$

Das Hilfslemma hat die folgende Verallgemeinerung für Für eine beliebige messbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiert man die messbaren Funktionen: $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Es gilt dann $f = f_+ - f_-$.

Definition 4.2.8. (Integral für numerische Funktionen) Es sei wie zuvor (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Ist wenigstens einer der Ausdrücke $\int f_+ d\mu$, $\int f_- d\mu$ endlich, so nennt man den Ausdruck

$$\int f d\mu := \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

das *Lebesguesche Integral* von f . Man nennt eine messbare Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *L-integrierbar* (im eigentlichen Sinne), falls beide Ausdrücke $\int f_+ d\mu$, $\int f_- d\mu$ endlich sind, oder äquivalent: $\int |f| d\mu < \infty$.

Lemma 4.2.9.

- Die Menge aller L-integrierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum.
- Eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann L-integrierbar wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt wird:
 - i. $\int |f|(x) d\mu(x) < +\infty$
 - ii. Es existiert eine L-integrierbare Funktion g mit $g \geq |f|$
- Sind $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar, so gilt

$$f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$$

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$$

Als eine Verallgemeinerung von 4.2.7 gilt der

Satz 4.2.10. (B. Levi) Es sei $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ eine Folge von mesbaren Funktionen mit $f_n \nearrow f$. Dann gilt

$$\int \sup_n f_n d\mu = \sup_n \int f_n d\mu$$

In der Def. 4.1.2 haben wir den Begriff einer μ -Nullmenge für ein Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) definiert. Es sei erwähnt, dass eine Nullmenge nicht notwendigerweise eine Element von \mathcal{A} sein muss. Ein Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) in dem jede μ -Nullmenge automatisch in \mathcal{A} enthalten ist, nennt man *vollständig*. Jeder Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) läßt sich zu einem vollständigem Maßraum $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ erweitern.

Es sei E_x eine Eigenschaft derart, dass für jeden Punkt $x \in X$ definiert ist, ob x diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Man sagt, dass μ -fast alle Punkte die Eigenschaft E besitzen, wenn E bis auf eine μ -Nullmenge N für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Z.B. sagt man, dass $f = g$ μ -fast überall, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ gilt und N eine μ -Nullmenge ist.

Für jedes $p \in (1, \infty)$ definiert man das Integral $N_p(f) := (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ sowie die Menge von p -fach integrierbaren Funktionen

$$\mathcal{L}^p(X, d\mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : N_p(f) < \infty\}$$

Ferner definiert man $\mathcal{L}^\infty(X, d\mu)$ als die Menge μ -fast überall beschränkten Funktionen, d.h., $f \in \mathcal{L}^\infty$ genau dann, wenn es ein $C \geq 0$ gibt mit $\mu\{|f| > C\} = 0$.

$$N_\infty(f) := \inf\{M : \mu(\{|f| > M\}) = 0\}$$

Lemma 4.2.11. (Hölder-Ungleichung) Es sei $p \in [1, +\infty]$ sowie $q \in [1, +\infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$. Für $f \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(X, d\mu)$ ist $f \cdot g$ integrierbar und es gilt

$$N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) \cdot N_q(g).$$

Lemma 4.2.12. (Minkowski-Ungleichung) Es sei $p \in [1, +\infty]$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$. Dann ist $f + g$ p -fach integrierbar und es gilt

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Insbesondere ist die Abbildung $N_p : \mathcal{L}^p(X, d\mu) \rightarrow [0, +\infty)$ eine Halbnorm.

Konvergenzsätze

Lemma von Fatou 4.2.13. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ eine Folge von messbaren Funktionen. Dann gilt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

(Zur Erinnerung: $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} \{f_m(x)\} = \sup_n (\inf_{m \geq n} \{f_m(x)\})$)

Satz von der majorisierten Konvergenz 4.2.14. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f_n \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$ eine fast überall punktweise konvergente Folge von Funktionen. Wir nehmen an, dass es ein $g \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$ gibt mit $|f_n| \leq g$ μ -fast überall. Dann existiert $f \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$ mit $\lim f_n(x) = f(x)$ fast überall und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_p(f_n - f) = 0$$

Lemma 4.2.15. Vollständigkeit. Jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$ (bzgl. N_p) konvergiert in (\mathcal{L}^p, N_p) gegen ein $g \in \mathcal{L}^p(X, d\mu)$. Es gibt ferner eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) , die in μ -fast allen Punkten von X punktweise gegen g konvergiert.

Um die störende Tatsache zu umgehen, dass für $f \in \mathcal{L}^p(X)$ die Gleichung $N_p(f) = 0$ bloß $f = 0$ μ -fast überall (und nicht $f = 0$) impliziert, identifiziert man alle Funktionen, die sich bloß auf einer Nullmenge unterscheiden, zu einer einzigen Klasse, und betrachtet solche Klassen statt einzelne Funktionen. Mathematisch läßt sich der Übergang von einzelnen Funktionen zu Klassen folgendermaßen bewerkstelligen:

$\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \text{messbar, } \mu\text{-fast überall } 0\}$ ist ein Untervektorraum in jedem $\mathcal{L}^p(X, d\mu)$. Also definiert man $L^p(X, d\mu) := \mathcal{L}^p(X, d\mu)/\mathcal{N}$. Die Menge $L^p(X, d\mu)$ besteht jetzt aus Äquivalenzklassen $[f]$ von Funktionen $f \in \mathcal{L}^p$, wobei

$$g \in [f] \stackrel{\text{Def}}{\iff} f - g \in \mathcal{N}$$

und ist ein normierter Vektorraum mit $\alpha[f] + \beta[g] := [\alpha f + \beta g]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sowie $\|[f]\|_{L^p} := N_p(f)$. Die Aussage 4.2.15 impliziert, dass $(L^p(X, d\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ ein Banachraum ist.

Beispiel. Es sei X eine beliebige Menge, $\mathcal{A} = 2^X$ und ν das Zählmaß auf X , d.h. $\nu(A) = \#(A)$ ist die Anzahl der Elemente in der Teilmenge A von X . Für diesen Maßraum gilt

$$L^p(X, d\nu) = L^p(X, d\nu) = \ell^p(X) := \{(a_j)_{j \in X} : a_j \in \mathbb{K}, \sum_{j \in X} |a_j|^p < +\infty\} \quad p \in [1, \infty)$$

$$L^\infty(X, d\nu) = L^\infty(X, d\nu) = \ell^\infty(X) := \{(a_j)_{j \in X} : a_j \in \mathbb{K}, \exists C_{(a_j)} \text{ mit } |a_k| \leq C_{(a_j)} \forall k \in X\}$$

in Verallgemeinerung von 1.1.5.b.

4.3. Hilberträume

In dem Spezialfall $p = q = 2$ und $f, g \in L^2(X, d\mu)$ impliziert die Hölderungleichung, dass $\int \bar{f} \cdot g \, d\mu < \infty$ gilt. Somit wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int \bar{f}(x) \cdot g(x) \, d\mu(x)$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(X, d\mu)$ definiert. Dieses Skalarprodukt macht aus $L^2(X, d\mu)$ einen Hilbertraum. Wir beginnen mit einer allgemeinen

Definition 4.3.1. Ein *Hilbertraum* ist ein \mathbb{K} -Vektorraum V , zusammen mit einem positiv definitem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ (symmetrisch falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitisch falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), so dass die durch die Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ induzierte metrische Struktur vollständig ist.

Schwächt man die Voraussetzungen ein wenig ab, in dem man statt der positiven Definitheit bloß semipositive Definitheit fordert und auf die Vollständigkeit verzichtet, so spricht man dann allgemeiner von einem *Prähilbertraum*. $\mathcal{L}^2(X, d\mu)$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d\lambda) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$, sind Beispiele von Prähilberträumen.

Einfache Eigenschaften

Im Folgenden steht $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ für einen Hilbertraum falls das Gegenteil nicht explizit erwähnt ist.

Schwarzsche Ungleichung 4.3.2. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ semipositiv definit, so gilt für all $v, w \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$:

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle$$

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sogar positiv definit so gilt $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$ genau dann wenn v und w linear abhängig sind.

Beweisskizze. Diese Ungleichung folgt aus $0 \leq \|v + \lambda w\|^2$ für $\lambda = -\langle v, w \rangle / \langle w, w \rangle$. □

Parallelogrammgleichung 4.3.3. $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2, \quad \forall v, w \in V$

Polarisationsidentität 4.3.4. In einem komplexen Hilbertraum läßt sich das Skalarprodukt aus der zugehörigen Norm wie folgt bestimmen: ($i = \sqrt{-1}$)

$$4\langle v, w \rangle = \sum_{n=0}^3 i^n \|v + i^n w\|^2 \quad \forall v, w \in V,$$

Vorsicht! Wenn man irgendeine Norm $\|\cdot\|$ auf der rechten Seite der obigen Gleichung benutzt, so ist die Abbildung $(v, w) \mapsto \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 i^n \|v + i^n w\|^2$ i.A. kein Skalarprodukt (nicht einmal multilinear!).

Pythagoräische Gleichung 4.3.5. Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum. Sind v_1, \dots, v_n paarweise orthogonale Vektoren, (d.h., $\langle v_j, v_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k$) so gilt die Identität von Pythagoras:

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \sum_j \|v_j\|^2$$

Definition 4.3.6.

- Es sei J eine beliebige Indexmenge. Eine Familie $(v_j)_{j \in J}$ von Elementen aus $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *orthonormal* falls $\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$ für alle $j, k \in J$ gilt.
- Eine solche Familie heißt *maximal*, falls für jedes $w \in V$ mit $\langle w, v_j \rangle = 0 \quad \forall j \in J$ die Bedingung $w = 0$ folgt. Eine maximale orthonormale Familie $(v_j)_{j \in J}$ eines Hilbertraumes nennt man auch eine *Hilbertbasis*.

Besselsche Ungleichung 4.3.7. Sind e_1, \dots, e_n paarweise orthonormale Vektoren in V , so gilt für jedes $v \in V$ die Besselsche Ungleichung

$$\|v\|^2 \geq \sum_{j=1}^n |\langle v, e_j \rangle|^2$$

Eine Teilmenge $C \subset V$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in C$ auch $tx + (1-t)y \in C \quad \forall t \in [0, 1]$. Eine fundamentale Aussage in der Hilbertraumtheorie, die die Vollständigkeit benutzt, ist das folgende

Lemma 4.3.8. Es sei V ein Hilbertraum, $C \subset V$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge und $y \in V$. Dann gibt es genau ein $z \in C$ mit $\|z - y\| = \inf_{x \in C} \|x - y\| =: d_{\|\cdot\|}(C, y)$.

Beweisskizze. Mit Hilfe der Parallelogrammgleichung weist man nach, dass $x_n \in C$ mit $\lim \|x_n - y\| \rightarrow d(C, y)$ eine Cauchy-Folge ist, und somit gegen ein $z \in C$ konvergiert. Die Eindeutigkeit von z folgt ebenfalls aus der Parallelogrammgleichung: gäbe es ein weiteres $z' \in C$, $z \neq z'$ mit $\|y - z\| = \|y - z'\| = d(C, y)$, so gelte dann

$$\left\| y - \frac{z+z'}{2} \right\|^2 < \left\| \frac{y-z}{2} + \frac{y-z'}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{z'-z}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|y-z\|^2 + \frac{1}{2} \|y-z'\|^2 = d(C, y)$$

im Widerspruch zur Konstruktion von z, z' . □

Als einfache Folgerungen notieren wir

Zerlegungssatz 4.3.9. Es sei $W \subset V$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes V . Dann ist jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutig bestimmte Summe $w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$, d.h.,

$$V = W \oplus W^\perp$$

Beweisskizze. Da $W \cap W^\perp = 0$ genügt es zu zeigen, dass $W + W^\perp = V$. Da $v - \pi_W(v) \perp W$ (wobei $\pi_W(v)$ den Vektor in W bezeichnet, der den kleinsten Abstand zum v hat, vgl. 4.3.8; gelte es aber $\langle v - \pi_W(v), u \rangle \neq 0$ für ein $u \in W$, so wäre für $\alpha = \langle v - \pi_W(v), u \rangle / \langle u, u \rangle$

$$\|v - \pi_W(v) - \alpha \cdot u\|^2 < \|v - \pi_W(v) - \alpha \cdot u\|^2 + \|\alpha u\|^2 = \|v - \pi_W(v)\|^2, \quad \text{Widerspruch!}$$

so folgt $v = \pi_W(v) + (v - \pi_W(v)) \in W + W^\perp$.

Rieszscher Darstellungssatz 4.3.10. In einem Hilbertraum gibt es für jede stetige Abbildung $\psi : V \rightarrow \mathbb{K}$ einen eindeutig bestimmten Vektor $v_\psi \in V$ mit

$$\psi(w) = \langle w, v_\psi \rangle \quad \forall w \in V$$

Wir kommen nun zu den Hauptsätzen, die die Existenz und Eigenschaften von Hilbertbasen beschreiben.

Theorem 4.3.11.

(i) Jeder (Prä)Hilbertraum besitzt eine Hilbertbasis.

(ii) Es sei $(e_j)_{j \in J}$ eine Hilbertbasis des Hilbertraumes V . Dann gilt $v = \sum_{j \in J} \langle e_j, v \rangle \cdot e_j$ und

$$\|v\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle e_j, v \rangle|^2 \quad \text{Parsevalsche Gleichung}$$

(iii) Es sei $(e_j)_{j \in J}$ eine Hilbertbasis des Hilbertraumes V und $\{j_n\}$ eine (abzählbare) Teilmenge aus J und (a_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen mit $\sum |a_n|^2 < \infty$. Dann existiert der Grenzwert der Reihe $\sum a_n e_{j_n}$ in V und es gilt

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_{j_n} \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

Bemerkungen. Die Konvergenz von $\sum_{j \in J} \langle v, e_j \rangle \cdot e_j$ ist wie folgt zu verstehen: Auch wenn J überabzählbar ist, gibt es in der obigen Summe nur abzählbare viele $k \in J$ mit $\langle v, e_k \rangle \neq 0$. Man wähle dann irgendeine Abzählung k_n , $n \in \mathbb{N}$, aller $k \in J$ mit $\langle v, e_k \rangle \neq 0$ und definiert $\sum_{j \in J} \langle e_j, v \rangle \cdot e_j := \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_{k_n}, v \rangle \cdot e_{k_n}$. Ferner gilt (z.B. für $w_n = \langle e_{k_n}, w \rangle \cdot e_{k_n}$).

Der obige Satz zeigt ferner, dass nach Wahl einer Hilbertbasis $(e_j)_{j \in J}$ von V die Abbildung

$$V \rightarrow \ell^2(J), \quad v \mapsto (\langle e_j, v \rangle)_{j \in J}$$

ein linearer und isometrischer Isomorphismus ist. Die Frage der Konvergenz in V wird in dem nächsten Lemma erörtert:

Lemma 4.3.12. *Es sei $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise orthogonalen Vektoren in einem Hilbertraum V . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- i. $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ konvergiert in der Normtopologie gegen ein $w \in V$
- ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|^2 < \infty$
- iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, w_n \rangle$ konvergiert in \mathbb{K} für jedes $u \in V$.

Typische Anwendung der obigen Theorie sind die Fourierreihen:

Fourierreihen: der diskrete Fall. Jedes Element $f \in L^2([0, 2\pi], d\lambda)$ interpretiert man als ein momentane Auslenkung eines periodisch schwingenden Objekts, z.B. einer Saite. Daher denkt man sich oft f periodisch fortgesetzt auf ganz \mathbb{R} . Eine solche Funktion ist, physikalisch 'argumentiert', eine Superposition einfacher Sinus- und Cosinusschwingungen. Mathematisch korrekt ausgedrückt heißt das, dass

Lemma 4.3.13. *Die Folge*

$$e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \in L^2([0, 2\pi]), \quad n \in \mathbb{Z}$$

bzw. deren reelle Version bestehend aus den folgenden reellwertigen Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Hilbertbasis von $L^2([0, 2\pi], d\lambda)$ bildet. Insbesondere gilt dann für jedes $f \in L^2([0, 2\pi], d\lambda)$:

$$(4.3.14) \quad f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n \cdot \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \cdot \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} =: \mathcal{F}(f), \quad \text{mit}$$

$$\hat{f}(n) := c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[0, 2\pi]} f(t) e^{-int} d\lambda(t) \quad \|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert in der L^2 -Norm gegen f . Sie heißt die Fourierreihe von f .

I.A konvergiert $\mathcal{F}(f)$ nicht punktweise gegen f . In diesem Zusammenhang erwähnen wir das

Dirichletsches Kriterium 4.3.15. *Es sei $f \in L^2([0, 2\pi], d\lambda)$ stückweise stetig differenzierbar auf $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$. (Präziser: es gibt einen stückweise stetig differenzierbaren Repräsentanten f einer Klasse aus $L^2([0, 2\pi], d\lambda)$.) Dann konvergiert die Fourierreihe $\mathcal{F}(f) = \sum b_n e^{int}$ von f punktweise in x_0 gegen*

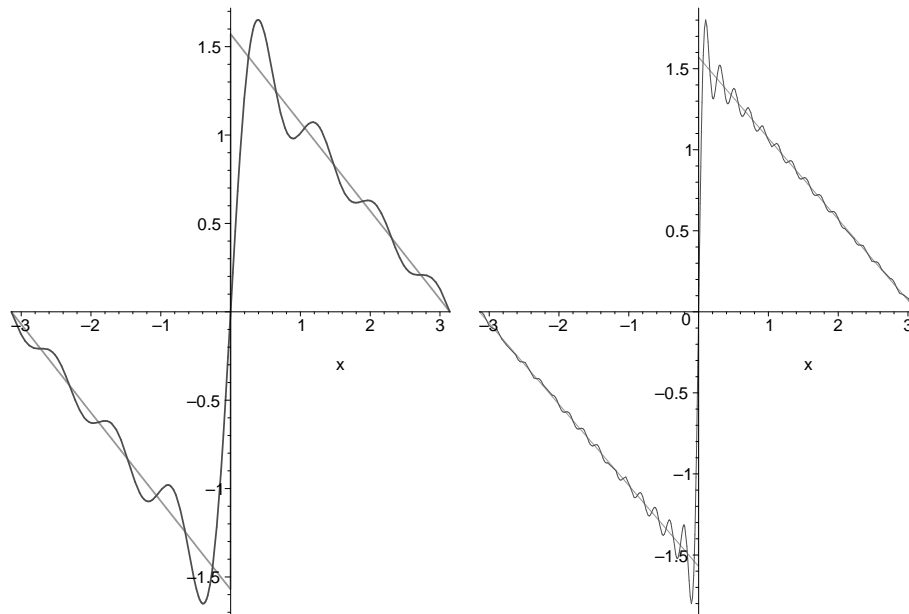
$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k b_n e^{inx_0}.$$

Dabei ist $f(x_0^+) := \lim_{t \searrow x_0} f(t)$, $f(x_0^-) := \lim_{t \nearrow x_0} f(t)$. Ein Beispiel einer reellen Fourierreihe: Die 2π -periodische Sägezahnfunktion $f(t) := \begin{cases} \frac{\pi-t}{2} & \text{für } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{für } t \in \{0, 2\pi\} \end{cases}$ hat die Fourierreihe

$$\mathcal{F}(f)(t) := \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-k \\ n \neq 0}}^k \frac{e^{int}}{2in}$$

Diese Reihe hat die folgenden (für jede stückweise stetige Funktion f mit $f(t) = (f(t_-) + f(t_+))/2$ und ihre diskrete Fourierreihe $\mathcal{F}(f)$ typischen) Eigenschaften:

- (i) $\mathcal{F}(f)$ konvergiert punktweise für jedes $t \in [0, \pi]$ gegen den Mittelwert $\frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$.
- (ii) $\mathcal{F}(f)$ ist stückweise stetig differenzierbar auf $[-\pi, \pi]$
- (iii) $\mathcal{F}(f)$ konvergiert sogar gleichmäßig in jedem Intervall, welches keine Sprungstelle von f enthält.



Die obigen Graphen zeigen eine Approximation von f durch die Fourierpolynome $\sum_{n=1}^N \sin(nt)/n$.

Fourierreihen: der kontinuierliche Fall. Motiviert durch (4.3.14), ersetzt man den diskreten Parameter $n \in \mathbb{Z}$ gegen den kontinuierlichen Parameter $x \in \mathbb{R}$ um die Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} d\lambda(t)$$

von f zu definieren. I.A., existiert das obige Integral nicht für eine beliebige (Klassen von) Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda)$ sondern bloß für $f \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ (Folgerung aus der Hölderschen Ungleichung). Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt $\widehat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$, d.h., \widehat{f} ist stetig und $\lim_{t \rightarrow +\infty} \widehat{f}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \widehat{f}(t) = 0$.

Die durch die obige Integralformel definierte Abbildung $L^1(\mathbb{R}, d\lambda) \cap L^2(\mathbb{R}, d\lambda) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R})$ ($L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$) hat jedoch überraschenderweise eine eindeutige Fortsetzung zu einem linearen und isometrischen Isomorphismus $L^2(\mathbb{R}, d\lambda) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\lambda)$. Das ist der Inhalt von dem

Satz von Plancherel 4.3.16. *Es gibt einen linearen und isometrischen Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, d\lambda) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\lambda)$, der eindeutig durch die Bedingung*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} d\lambda(t) \quad \text{für ein } f \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda) \cap L^2(\mathbb{R}, d\lambda)$$

bestimmt ist. Ferner gilt $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \text{Id}$. Insbesondere gilt dann die Inversionsformel

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \cdot e^{ixt} d\lambda(x)$$

Diese Aussage ist völlig analog zu 4.3.14 in dem diskreten Fall in dem jetzt die Summe durch ein Integral ersetzt worden ist.

4.4. Produktmaße

Gegeben seien endlich viele Maßräume $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$. Unser Ziel ist es auf dem Kartesischen Produkt $\prod_j X_j$ eine geeignete σ -Algebra und ein Maß zu konstruieren.

Definition 4.4.1. Durch $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ bezeichnen wir die kleinste σ -Algebra auf $\prod_j X_j$, die alle Mengen der Gestalt $A_1 \times \cdots \times A_n$, $A_j \in \mathcal{A}_j$ enthält.

Um das Produktmaß $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ zu definieren, beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$ mit zwei Faktoren. Der allgemeine Fall $n \in \mathbb{N}$ wird dann induktiv konstruiert $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1} \otimes \mu_n := (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n$.

Bemerkungen. Für eine beliebige Teilmenge $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sowie beliebige $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ gilt

$$\begin{aligned} A_{x_1} &:= \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2 \\ A_{x_2} &:= \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in A\} \in \mathcal{A}_1 \end{aligned}$$

Ferner, für jedes $x_1 \in X_1$ bzw. $x_2 \in X_2$ und beliebiges $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sind die numerischen Funktionen $s_A : X_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, $x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1})$ sowie $r_A : X_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, $x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2})$ messbar, falls μ_1, μ_2 σ -endlich sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt das Produktmaß angeben.

Theorem 4.4.2. Es seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$ σ -endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, für welches gilt

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Für ein beliebiges $B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt dann

$$\mu(B) = \int s_B(x_1) d\mu_1(x_1) = \int r_B(x_2) d\mu_2(x_2)$$

Wir schreiben $\mu_1 \otimes \mu_2$ für das oben konstruierte Maß μ .

Bem. Sind die Maße μ_1 und μ_2 vollständig, so muss i.A. $\mu_1 \otimes \mu_2$ nicht vollständig sein. Die Vollständigkeits von dem Produkt der Lebesgue-Maße: $\lambda_{\mathbb{R}^m} \otimes \lambda_{\mathbb{R}^n}$ ist das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^{m+n} .

Satz von Tonelli 4.4.3. Es seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ zwei σ -endliche Maßräume. Ist $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbare Funktion, so sind auch

$$x_1 \mapsto \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \quad \text{sowie} \quad x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$$

messbare Funktionen und es gilt

$$\int f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int \left(\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$$

Satz von Fubini 4.4.4. *Unter den Voraussetzungen wie in dem Satz von Tonelli sei $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Dann sind die fast μ_j -überall definierte Funktionen*

$$x_1 \mapsto \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \quad \text{sowie} \quad x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$$

integrierbar (d.h. in \mathcal{L}^1) und es gilt

$$\int f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int \left(\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int \left(\int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$$

Der nächste Satz gilt für die Lebesgueschen Maße. Für $A \in \mathcal{A}$ schreiben wir $\int_A f d\mu := \int f \cdot \chi_A d\mu$.

Transformationsformel 4.4.5. *Es seien $D_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ zwei offene Teilmengen und $\Phi : D_1 \rightarrow D_2$ ein stetig differenzierbarer Diffeomorphismus. Dann gilt für jede messbare Funktion $f : D_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die ein L -Integral besitzt*

$$\int_{D_2} f(y) d\lambda(y) = \int_{D_1} f \circ \Phi(x) \cdot J_\Phi(x) d\lambda(x).$$

Hierbei ist $J_\Phi(x) := |\det(\text{Jac}(\Phi)(x))|$

Korollar 4.4.6. *Mit den obigen Voraussetzungen und Notation gilt es für jede Lebesgue-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$:*

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A J_\Phi(x) d\lambda(x)$$

5. Integration auf Mannigfaltigkeiten

5.1. Untermannigfaltigkeiten und abstrakte Mannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten sind mathematische Objekte die lokal genau wie offene Mengen in \mathbb{R}^n aussehen, aber global eine kompliziertere Struktur haben. Zu den einfachsten Beispielen von Mannigfaltigkeiten, die nicht diffeomorph zu offenen Teilmengen in \mathbb{R}^n sind, gehören etwa die $n-1$ -dimensionale Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}$ oder der Torus $S^1 \times \dots \times S^1$ (zweidimensional ist eine solche Menge diffeomorph zu der Oberfläche eines Rettungsringes). Für eine ausführliche Betrachtung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten verweisen wir auf БОУТНВУ, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*.

Es sei an den Begriff der lokalen Koordinaten auf \mathbb{R}^n erinnert, vgl. 1.4.13. Es sei $\varphi : U_{\mathbb{R}^n} \subset \mathbb{R}^n$ ein solches Koordinatensystem und $k \leq n$ eine natürliche Zahl. Wir nennen eine nicht leere Menge der Gestalt

$$S_c := \{x \in U_{\mathbb{R}^n} : \varphi_{k+1}(x) = c_1, \dots, \varphi_n(x) = c_{n-k}\}$$

für gewisse $c_k \in \mathbb{R}$ eine k -dimensionale Scheibe (oder einfach k -Scheibe) in $U_{\mathbb{R}^n}$.

Definition 5.1.1. Es seien $D_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$ offene Teilmengen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\Psi : D_1 \rightarrow D_2$ nennt man

- eine *Immersion*, falls die Ableitung $D\Psi(x)$ für jedes $x \in D_1$ eine injektive Abbildung ist, d.h. $\text{Rang } D\Psi(x) = n_1$
- eine *Submersion*, falls die Ableitung $D\Psi(x)$ für jedes $x \in D_1$ eine surjektive Abbildung ist, d.h. $\text{Rang } D\Psi(x) = n_2$

Definition 5.1.2. Eine k -dimensionale *reguläre Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^n ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, so dass für jeden Punkt p ein Koordinatensystem (U, ϕ, \mathbb{R}^n) mit $p \in U$ gibt, so dass $U \cap M$ eine k -Scheibe S_c ist.

Eine reguläre Untermannigfaltigkeit muss nicht eine abgeschlossene Teilmenge sein: So, z.B. ist $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, z = c\}$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit, die nicht abgeschlossen, jedoch lokal abgeschlossen ist (d.h., es existiert eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$, so dass $M \cap U$ abgeschlossen bzgl. der Relativtopologie auf U ist).

Als eine Verallgemeinerung des obigen Begriffes definieren wir:

Eine k -dimensionale *immersierte Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^n (möglicherweise mit Selbstdurchschnitten) ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammen mit einer Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$, so dass für jedes $j \in J$ eine bijektive Immersion $\psi_j : U_{\mathbb{R}^k} \rightarrow V_j$ existiert.

Die Teilmengen $V_j \subset M$ müssen nicht unbedingt offen in der Relativtopologie von $M \subset \mathbb{R}^n$ sein.

Bem. Eine reguläre Untermannigfaltigkeit im Sinne der obigen Definition stimmt mit der in 1.4.30 gegebenen Definition überein.

Jede k -dimensionale immersierte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist das Bild einer geeigneten Immersion $\psi : U_{\mathbb{R}^k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $U_{\mathbb{R}^k}$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k ist.

Das Bild der injektiven Immersion $\gamma : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin(2t), \cos(t))$ ist ein Beispiel einer immersierten Untermannigfaltigkeit, welche keine reguläre Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ist.

Nun definieren wir den Begriff einer abstrakten Mannigfaltigkeit.

Definition 5.1.3. Eine *topologische Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) , mit der Topologie \mathcal{T} , d.h. der Menge aller offenen Teilmengen von X , der die folgenden Bedingungen erfüllt:

M1) (X, \mathcal{T}) ist hausdorffsch.

M2) (X, \mathcal{T}) besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.

M3) Zu jedem Punkt $p \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ mit $p \in U$ und einen Homöomorphismus $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n(p)}$ auf eine offene Teilmenge V in $\mathbb{R}^{n(p)}$, wobei $n = n(p) \in \mathbb{N}$.

Definition 5.1.4. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *parakompakt* wenn X hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ von X eine lokal-endliche offene Verfeinerung $\mathcal{V} = \{V_k : k \in K\}$ besitzt.

Dabei heißt \mathcal{V} eine *Verfeinerung* einer Überdeckung \mathcal{U} falls \mathcal{V} ebenfalls eine Überdeckung von X ist und für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $V \subset U$. $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ heißt *lokal-endlich* wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $W(x)$ besitzt, so dass die Menge $\{j \in J : U_j \cap W(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Alternativ kann man in 5.1.3 die Bedingung M2) durch

M2') (X, \mathcal{T}) ist *parakompakt*.

ersetzen. (Vgl. jedoch ??.) Ein topologischer Raum M , welcher die Bedingungen M1, M2' und M3 erfüllt, heißt eine topologische *parakompakte Mannigfaltigkeit*.

Definitions 5.1.5.

• Jeder Homöomorphismus $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ wie in M3) heißt eine *stetige Karte* auf X . Eine stetige Karte auf X wird meist mit (U, ϕ) oder (U, ϕ, \mathbb{R}^n) bezeichnet.

• Sind x_1, \dots, x_n die linearen Koordinatenfunktionen auf \mathbb{R}^n , so nennt man die Funktionen $x_1 \circ \phi, \dots, x_n \circ \phi$ die *lokalen stetigen Koordinaten(funktionen)* auf X . Wenn die Wahl der Karte aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir $x_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ statt $x_j \circ \phi$ für die j -te lokale Koordinate(nfunktion). Mittels ϕ werden die Punkte p in U mit den Koordinatenvektoren $(x_1(p), \dots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$ identifiziert.

- Sind $\phi : U \rightarrow V$ und $\psi : U' \rightarrow V'$ zwei Karten auf X , so heißt die Abbildung:

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \longrightarrow \psi(U \cap U')$$

ein *Kartenwechsel*. Diese Abbildung ist automatisch ein Homöomorphismus.

- Ein Menge \mathcal{A} von (stetigen) Karten $(U_j, \phi_j)_{j \in J}$ auf X mit $\bigcup_j U_j = X$ nennt man einen (stetigen) *Atlas*.

Definition 5.1.6. Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j) : j \in J\}$ auf einer Mannigfaltigkeit heißt *C^k -differenzierbar*, falls für alle Paare $(j, k) \in J \times J$ der Kartenwechsel

$$\phi_{kj} := \phi_k \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap U_k) \longrightarrow \phi_k(U_j \cap U_k)$$

ein C^k -Diffeomorphismus ist. (Vereinbarungsgemäß ist die Abbildung $\psi : \emptyset \rightarrow \emptyset$ C^k -differenzierbar.) Die möglichen Wahlen für k sind etwa $k \in \{1, 2, \dots, \infty, \omega\}$. Wenn wir von einem differenzierbaren Atlas sprechen (ohne die explizite Angabe von C^k) so meinen wir einen C^∞ -differenzierbaren Atlas.

Die Menge aller differenzierbaren Atlanten auf einer Mannigfaltigkeit X ist partiell durch die Inklusionrelation \subseteq geordnet. Daher ist es sinnvoll von einem maximalen differenzierbaren Atlas \mathcal{A}^{\max} zu sprechen, der einen C^n -Atlas \mathcal{A} enthält. Damit ist ein diff. Atlas gemeint, der in keinem echt größeren differenzierbaren und mit \mathcal{A} kompaqtilblen Atlas enthalten ist. (Ganz allgemein heißen zwei Atlanten $\{(U_j, \phi_j) : j \in J\}$ und $\{(V_k, \psi_k) : k \in K\}$ auf einer top. Mf. M heißen C^n -kompatibel, falls alle Kartenwechsel $\psi_k \circ \phi_j^{-1}$ C^n -differenzierbare Diffeomorphismen (zwischen offenen Teilmengen in \mathbb{R}^k) sind.)

Definition 5.1.7. Eine (C^k -) *differenzierbare Struktur* auf einer topologischen Mannigfaltigkeit X ist ein maximaler (C^k -) differenzierbarer Atlas.

Lemma 5.1.8.

- Jeder differenzierbarer Atlas \mathcal{A} ist in einem eindeutig bestimmten maximalen differenzierbaren Atlas \mathcal{A}^{\max} enthalten.
- Zwei differenzierbare Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{A}' auf X definieren dieselbe differenzierbare Struktur auf X genau dann wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ebenfalls ein differenzierbarer Atlas auf X ist.

In der Definition der Mannigfaltigkeit, der Exponent n in \mathbb{R}^n kann a priori von dem Punkt $p \in X$ abhängig sein. Besitzt X eine differenzierbare Struktur, so sieht man sofort, dass für je zwei sich überlappende Karten $\phi_j : U_j \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ aus einem differenzierbaren Atlas \mathcal{A} notwendigerweise $n_1 = n_2$ gelten muß. Das folgt aus der Tatsache, dass zumindest für die beiden lineare Abbildungen $D\phi_{21}(p) : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ und $D\phi_{12}(q) : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ die aus der Kettenregel folgende Identitäten gelten ($\phi_{21}(p) = q$):

$$D\phi_{12}(q) \circ D\phi_{21}(p) = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n_1}} \quad D\phi_{21}(p) \circ D\phi_{12}(q) = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n_2}}$$

Auch in der topologischen Kategorie gilt der folgende Satz von Brouwer, deren Beweis außerhalb des Rahmens dieser Vorlesung liegt:

“Eine Abbildung zwischen einer nicht-leeren offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ kann niemals ein Homöomorphismus sein wenn $m \neq n$ ist.”

Zusammenfassend gilt also (vgl. 1.3.6 zum Begriff des Zusammenhangs und der Zusammenhangskomponente):

Theorem 5.1.9. *Es sei X eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in X$ wähle man $n(p) \in \mathbb{N}$, so dass eine Karte (d.h., ein [differenzierbarer] Homöomorphismus) $\phi : U \rightarrow V$ mit $p \in U$ und $V \subset \mathbb{R}^{n(p)}$ offen existiert. Dann hängt $n(p)$ nicht von der Wahl einer Karte ab und ist auf jeder Zusammenhangskomponente von X konstant. Man nennt dann $n = n(p)$ die Dimension der Zusammenhangskomponente von M , die p enthält.*

Im Folgenden bezeichnet der Ausdruck 'Mannigfaltigkeit' immer eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer glatten, d.h., C^∞ -Struktur, außer das Gegenteil wird explizit formuliert. Wenn wir eine bestimmte differenzierbare Struktur im Sinn haben, so schreiben wir (X, \mathcal{A}_X) wobei \mathcal{A}_X ein maximaler differenzierbarer Atlas auf X ist.

Definition 5.1.10. Eine (C^n -) differenzierbare Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten X und Y ist eine stetige Abbildung $F : X \rightarrow Y$, die noch die folgende Bedingung erfüllt: Für jedes Paar von Karten, $(U, \phi) \in \mathcal{A}_X$ und $(V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$ ist die Abbildung

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

(C^n -) differenzierbar. Analog heißt F eine Submersion [Immersion] falls für jedes Paar von Karten, $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ eine Submersion [Immersion] im Sinne von 5.1.1 ist. $F : M \rightarrow N$ heißt eine Diffeomorphismus, falls F ein Homöomorphismus ist, und gleichzeitig sowohl eine Immersion wie auch eine Submersion. Ist $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge, so sagen wir, dass $F : A \rightarrow N$ (C^k -) differenzierbar ist wenn es eine offene Teilmenge $U \supset A$ und eine (C^k -) differenzierbare Abbildung $\hat{F} : U \rightarrow N$ existiert, so dass $\hat{F}|_A = F$.

Eine auf einer Mannigfaltigkeit M k -fach stetig differenzierbare Funktion nennt man jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass bezüglich jeder Karte $\varphi : U \rightarrow V_{\mathbb{R}^n}$ die Funktion $f \circ \varphi^{-1} : V_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ k -fach stetig differenzierbar ist (d.h., alle k -fachen partiellen Ableitungen stetig sind).

Einfache Beispiele von differenzierbaren k -dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind

- beliebige offene Teilmengen von \mathbb{R}^k
- Sphären $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$.

Um weitere Beispiele von Mannigfaltigkeiten zu konstruieren, die nicht a priori als Teilmengen von \mathbb{R}^N erscheinen, braucht man den Begriff der

Quotientenabbildungen und Quotiententopologie. Es seien X, Y zwei topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt eine *Quotientenabbildung* falls f surjektiv ist und

$$U \subset Y \text{ ist offen genau dann wenn } f^{-1}(U) \text{ offen in } X \text{ ist.}$$

Lemma 5.1.11. *Es sei X ein top. Raum, Y eine Menge und $f : X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Es gibt dann genau eine Topologie auf Y , die f zu einer Quotientenabbildung macht. Diese Topologie nennt man die Quotiententopologie.*

Die Topologie auf Y besteht aus den folgenden Mengen:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

Beispiel 5.1.12. Der projektive Raum.

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Man definiere auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Relation $x \sim y \stackrel{\text{Def}}{\iff} x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Man identifiziere die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume ℓ in \mathbb{K}^{n+1} (d.h., Geraden durch den Nullpunkt) mit $(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. Versehen mit der Quotiententopologie, bezeichnen wir

den letzteren Raum als $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ oder $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ und nenne ihn den n -dimensionalen *projektiven Raum*. Der projektive Raum trägt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit; ($\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ trägt sogar eine reell- oder komplex-analytische Struktur; je nachdem ob $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt.) Zunächst stellt man fest, dass $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ein Hausdorffraum mit einer abzählbaren Basis der Topologie ist. Ein differenzierbarer Atlas auf \mathbb{P}^n ist z.B. wie folgt gegeben: Mit $V_j := \{x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} : x_j \neq 0\}$ ist auch $U_j := \pi(V_j) \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ offen, wobei $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ die Quotientenabbildung ist. Dann ist $\mathfrak{U} = \{(\pi(V_j), \varphi_j) : j = 1, \dots, n+1\}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ mit den Karten

$$\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \varphi_j([x_1, \dots, x_j, \dots, x_{n+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_j} \right)$$

Wir schreiben, wie allgemein üblich, $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ für $\pi(x_1, \dots, x_{n+1})$ und $U_{k\ell}$ für den Durchschnitt $U_k \cap U_\ell$. Die von φ_j induzierte Koordinatenfunktionen w_1^j, \dots, w_n^j auf $U_j = \{[x] : x_j \neq 0\}$ haben dann die Gestalt

$$w_\ell^j([x]) = \frac{x_\ell}{x_j}$$

Die Kartenwechsel haben dann die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \varphi_\ell \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_{k\ell}) &\longrightarrow \varphi_\ell(U_{k\ell}), & \ell > k \\ (w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}) &\longmapsto \left(\frac{w_1^{(k)}}{w_{\ell-1}^{(k)}}, \dots, \frac{w_{k-1}^{(k)}}{w_{\ell-1}^{(k)}}, \frac{1}{w_{\ell-1}^{(k)}}, \frac{w_k^{(k)}}{w_{\ell-1}^{(k)}}, \dots, \frac{w_{\ell-2}^{(k)}}{w_{\ell-1}^{(k)}}, \frac{w_\ell^{(k)}}{w_{\ell-1}^{(k)}}, \dots, \frac{w_n^{(k)}}{w_{\ell-1}^{(k)}} \right) \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.13. Ein endliches Produkt $M_1 \times \dots \times M_k$ von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M_j ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Konstruktionslemma für Mannigfaltigkeiten. 5.1.14. Es sei X eine Menge, $\mathfrak{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ eine abzählbare Überdeckung von X , zusammen mit injektiven Abbildungen $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ für jedes α . Man betrachte die folgenden Bedingungen:

- 1) Für jedes $\alpha \in A$ $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ist offen in \mathbb{R}^n .
- 2) Für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ sind die Mengen $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen.
- 3) Für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ sind die induzierten Abbildungen

$$\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

(C^k -) Diffeomorphismen.

- 4) Für jedes Paar von Punkten $p, q \in X$, $p \neq q$ gilt: Entweder es existiert ein U_α mit $p, q \in U_\alpha$ oder es existieren $U_\alpha, U_\beta \in \mathfrak{U}$ mit $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ und $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

Angenommen, die Überdeckung $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ erfüllt die Bedingungen 1)–4). Dann trägt X die Struktur einer (C^k -) differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Definition 5.1.15. Eine *reguläre Untermannigfaltigkeit* N einer Mannigfaltigkeit M ist eine abgeschlossene Teilmenge $N \subset M$, so dass für jedes $p \in N$ eine Koordinatenkarte (U, φ) existiert, so dass $\varphi(p) = 0$ und $\varphi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : x_j \in \mathbb{R}\} \cap \varphi(U)$ gilt.

Die Menge N trägt dann auf natürliche Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, und die Inklusionsabbildung $j : N \hookrightarrow M$ ist dann eine Immersion.

Man beachte, dass wenn zwei Mannigfaltigkeiten N und M zusammen mit einer injektiven Immersion $j : N \rightarrow M$ gegeben sind, so kann es passieren, dass das Bild $j(N) \subset M$ keine reguläre Untermannigfaltigkeit von M ist, und diese Pathologie passieren kann sogar wenn das Bild $j(N)$ abgeschlossen in M ist.

Zerlegung der 1

Es sei (X, T) ein topologischer Raum [differenzierbare Mannigfaltigkeit] und $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von X . Lokal endlich bedeutet hier, dass für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $W(x) \subset X$ existiert, so dass nur endlich viele Mengen $U_j \in \mathcal{U}$ einen nicht leeren Durchschnitt mit $W(x)$ haben. Eine Familie $(\alpha_j : j \in J)$ von stetigen [differenzierbaren] Funktionen $\alpha_j : X \rightarrow [0, 1]$ heißt eine stetige [differenzierbare] *Zerlegung der 1*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $\forall j \in J \text{ supp}(\alpha) = \overline{\{x \in X : \alpha(x) \neq 0\}} \subset U_j$
- $\forall x \in X \sum_{j \in J} \alpha_j(x) = 1$

Wir notieren die relevante Fakten:

Theorem 5.1.16.

- Jede offene Überdeckung $\mathfrak{V} = \{(V_j) : j \in J\}$ einer Mannigfaltigkeit M besitzt eine lokal endliche offene Verfeinerung $\mathcal{U} = \{U_k : k \in K\}$, d.h., für jedes $x \in V_j \subset M$ gibt es ein $U_k \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_k \subset V_j$
- Jede offene Überdeckung $\mathfrak{V} = \{(V_j) : j \in J\}$ einer Mannigfaltigkeit M (allgemeiner, eines parakompakten topologischen Raumes) besitzt eine untergeordnete differenzierbare Zerlegung der 1 $(\alpha_j)_{j \in J}$, so dass $\text{supp}(\alpha_j)$ eine lokal endliche (abgeschlossene) Überdeckung von M bildet.

Mit Hilfe einer Zerlegung der 1 lässt sich ein wohldefiniertes Integral auf einer Mannigfaltigkeit M definieren. Wir diskutieren zunächst den Fall, wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit ist.

- Fall 1: Die Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine Karte (U, φ) mit $U = M$. Es sei dann $\psi := \varphi^{-1} : V_{\mathbb{R}^k} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine (reguläre) Parametrisierung von M . Für eine messbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ definieren wir dann

$$\int_M f \, dM := \int_V f \circ \psi(x) \cdot J_\psi(x) \, d\lambda(x)$$

wobei $D\psi(x)^T \cdot D\psi(x) \in \text{End}(\mathbb{R}^k)$ die *Gramsche Matrix* von ψ , $\det(D\psi(x)^T \cdot D\psi(x))$ die Gramsche Determinante, und $J_\psi(x) := \sqrt{\det(D\psi(x)^T \cdot D\psi(x))}$ der Jakobische Transformationsfaktor ist. Wir nennen dabei $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ *integrierbar*, falls der rechtsstehende Ausdruck endlich ist.

- Fall 2. Die k -dimensionale Mannigfaltigkeit M hat einen lokal endlichen Atlas $\mathcal{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}$. Dann wähle man eine der Überdeckung $\{(U_j)\}$ untergeordnete differenzierbare Zerlegung der 1, (α_j) und man definiere für ein $f : M \rightarrow \mathbb{K}$

$$(5.1.17) \quad \int_M f \, dM := \sum_j \int_{\varphi_j(U_j)} (\alpha_j \cdot f) \circ \psi_j(x) \cdot J_{\psi_j}(x) \, d\lambda(x) \quad \psi_j := \varphi_j^{-1}$$

Hilfslemma 5.1.18. *Der rechtsstehende obige Ausdruck ist unabhängig von der Wahl des Atlases $\{(U_j, \varphi_j)\}$ auf M und der Wahl einer untergeordneten Zerlegung der 1.*

5.2. Tangentialräume und Vektorraumbündel

Der Tangentialraum $T_p M$ in dem Punkt p einer Mannigfaltigkeit lässt sich als die beste lokale Approximation von M durch einen linearen Vektorraum interpretieren. Für eine (reguläre) k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, die lokal als die Nullstellenmenge gewisser Funktionen $r_1, \dots, r_{n-k} \in C^\infty(U)$ definiert ist, kann man den Tangentialraum $T_p M$ als einen k -dimensionalen linearen Unterraum von \mathbb{R}^n auffassen.

Lemma 5.2.1. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, so dass $U \cap M$ das Nullstellengebilde der definierenden Funktionen $r_1, \dots, r_{n-k} \in C^\infty(U)$ ist. Die folgenden Teilmengen in \mathbb{R}^n sind dann gleich und Untervektorräume von \mathbb{R}^n :*

- (a) $\{\dot{\gamma}(0) : \gamma : (-\varepsilon_\gamma, \varepsilon_\gamma) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n \text{ glatte Kurve mit } \gamma(0) = p\}$
- (b) $\{w \in \mathbb{R}^n : D_w(r_j)(p) = 0 \forall j = 1, \dots, n-k\}$
- (c) $\text{Bild}(D(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}) = D(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k)$ für jede Karte (U, φ) auf M um p .

Jeder dieser Mengen heißt dann der *Tangentialraum* von M in p

Falls M eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist (die nicht in irgendeinem \mathbb{R}^n eingebettet ist), so modifiziert man die Definition (a) in dem man für $p \in M$ die Menge aller Äquivalenzklassen $\{[\gamma]_p\}$ von differenzierbaren Kurven γ durch p betrachtet (d.h. $\gamma(0) = p$), wobei $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$ falls bezüglich einer (und damit jeder) Karte (U, φ) die Gleichung $\frac{d\varphi \circ \gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\varphi \circ \gamma_2}{dt}(0)$ gilt. Damit erhalten wir auch für beliebige Mf:

$$(a') \quad T_p M = \{[\gamma]_p : \gamma \text{ ist eine differenzierbare Kurve in } M \text{ durch } p\}$$

Jedes Element $v \in T_p M$ definiert eine Punktderivation $v_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, etwa durch die Vorschrift

$$(5.2.2) \quad v_p(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma_v \quad \text{wobei } \gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ eine Kurve mit } \dot{\gamma}(0) = v \text{ ist}$$

Definition 5.2.3. Es sei M eine (reelle oder komplexe) Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine beliebige offene Teilmenge. Eine *Punktderivation* an der Stelle $p \in M$ ist eine Abbildung $X_p : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{K}$, die die folgende Bedingungen erfüllt:

- A $X_p : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{K}$ ist \mathbb{K} -linear
- B $X_p : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{K}$ erfüllt die Leibnizregel: $\forall f, g \in C^\infty(U) \quad X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g)$

Umgekehrt, jeder Punktderivation $w_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$, läßt sich dann der Tangentialvektor $(w_p(x_1), \dots, w_p(x_n))$ wobei x_j die Einschränkungen der kartesischen Koordinatenfunktionen auf \mathbb{R}^n sind. Damit haben noch die vierte Charakterisierung

$$(d) \quad T_p M \cong \{w_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : w_p \text{ ist eine Punktderivation in } p\}.$$

Wählt man in einer Umgebung U von $p \in M$ lokale Koordinaten (d.h., eine Karte) so gilt für jede Punktderivation $v_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$: $\exists! a_j \in \mathbb{R}$ mit

$$v_p(f) = \sum_{j=1}^k a_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \quad \forall f \in C^\infty(U)$$

Das folgt aus dem

Fundamentallemma 5.2.4. *Es sei $V = B_R(p) \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Kugel, $x_1, \dots, x_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ die kartesischen Koordinatenfunktionen und $f \in C^\infty(V)$ beliebig. Dann gibt es Funktionen $f_j \in C^\infty(V)$, $j = 1, \dots, k$, so dass*

$$f(x_1, \dots, x_k) = f(p) + \sum f_j(x_1, \dots, x_k)(x_j - x_j(p)) \quad \text{mit} \quad f_j(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$$

Man kann die obige Funktionen f_j explizit wie folgt definieren: $f_j(x) = \int_0^1 f(x(p) + t(x - x(p))) dt$.

Insbesondere also ist die in (5.2.2) definierter Abbildung ein linearer Isomorphismus, $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}|_p$ bildet eine Basis von $T_p M$ (natürlich für verschiedene Wahlen der lokalen Koordinaten x_1, \dots, x_k erhält man verschiedene Basen von $T_p M$) und es gilt daher

$$\dim_p M = \dim T_p M = \dim_{\mathbb{K}} \{v_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{K} : v_p \text{ ist eine Punktderivation in } p\}.$$

Das Model für die nächsten Objekte (d.h. für die Vektorraumbündel) ist das Tangentialbündel, welches eine *disjunkte* Summe $\coprod_p T_p M$ der oben definierten Tangentialräume ist. Diese Menge ist eine Mannigfaltigkeit mit einer zusätzlichen Struktur, nämlich eines Atlases, deren Karten eine besondere Struktur haben.

Definition 5.2.5. Ein (stetiges, glattes) *reelles Vektorraumbündel vom Rang r* oder ein *r -Vektorraumbündel* ist ein Tripel (π, E, X) bestehend aus einer surjektiven stetigen Abbildung $\pi : E \rightarrow X$ zwischen den topologischen Räumen E und X (oder einer Submersion zwischen Mannigfaltigkeiten E und X), die die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Jede Faser $\pi^{-1}(x)$ ist ein r -dimensionaler Vektorraum.
- (ii) **lokale Trivialität:** Jeder Punkt $x \in X$ hat eine offene Umgebung $U \subset X$, so dass $\pi^{-1}(U)$ homöomorph bzw diffeomorph zu $U \times \mathbb{R}^r$ ist und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E \supset \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{R}^r \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ U & = & U \end{array}$$

Dabei verlangt man, dass jede Einschränkung $\text{pr}_2 \circ \psi : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^r$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Man nennt E den *Totalraum* und X die *Basis* des Vektorraumbündels (π, E, X) . Für die *Faser* $\pi^{-1}(x)$ schreibt man oft auch E_x .

Die Abbildung $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ mit den obigen Eigenschaften nennt man eine *Bündelkarte*. Es seien $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ und $(\pi^{-1}(U_\beta), \psi_\beta)$ zwei Bündelkarten. Ein Bündelkartenwechsel $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ hat die folgende Gestalt:

$$(5.2.6) \quad \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \quad (x, v) \mapsto (x, g_{\beta\alpha}(x)(v))$$

wobei $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{R})$ eine stetige bzw. glatte Abbildung ist. Eine Überdeckung von E mit Bündelkarten nennt man einen *Bündelatlas*.

Man nennt ein VRBündel $E \rightarrow X$ *trivial* wenn es eine globale Bündelkarte (sog. globale Trivialisierung) $E \simeq M \times \mathbb{R}^r$ gibt.

Definition 5.2.7. Es sei (π, E, X) ein VRBündel und $U \subset X$ eine offenen Teilmenge. Ein Schnitt $\sigma : U \rightarrow E$ ist eine stetige bzw. glatte Abbildung, so dass $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$. Die Menge aller Schnitte über U in E bezeichnet man mit $\Gamma(U, E)$. Diese Menge hat die Struktur eines \mathbb{R} -Vektorraumes bzgl. der punktweise Addition und Multiplikation mit Skalaren aus \mathbb{R} .

Lemma 5.2.8.

- Ein Vektorraumbündel $\pi : E \rightarrow X$ ist genau dann *global trivial*, wenn es globale Schnitte $\sigma_j \in \Gamma(M, E)$ gibt, so dass $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x))$ eine Basis von jeder Faser $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$ ist.
- Die Wahl einer lokalen Trivialisierung $E|_U \xrightarrow{\psi} U \times \mathbb{R}^r$ ist äquivalent zu der Wahl von glatten Schnitten, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma(U, E)$, so dass $(\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x))$ eine Basis von $\pi^{-1}(x)$ für alle $x \in U$ ist. (Das Tupel $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ nennt man ein *lokales n -Bein* auf E .)

Remark 5.2.9. Es sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel über X und $M \subset X$ eine Teilraum bzw. eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist $\pi : \pi^{-1}(M) \rightarrow M$ ein Vektorraumbündel über M . Ist Y eine Mannigfaltigkeit, so ist $\pi \times \text{Id} : E \times Y \rightarrow X \times Y$ ein Vektorraumbündel über $X \times Y$. Diese beiden

Bemerkungen liegen der Konstruktion des Pull-Back Bündels zugrunde: Für jedes Vektorraumbündel $\pi_E : E \rightarrow X$ und eine beliebige glatte Abbildung $F : Z \rightarrow X$, das Pull-Back-Bündel F^*E ist ein Vektorraumbündel über Z , dessen Totalraum ist das Urbild von $Z = \text{Graph}(F) = \{(F(z), z) : z \in Z\} \subset X \times Z$ bzgl $\pi_E \times \text{Id} : E \times Z \rightarrow X \times Z$.

Remark 5.2.10. Analog zu dem Konstruktionslemma 5.1.14 kann man auf jeder Menge E , zusammen mit einer surjektiven Abbildung $\pi : E \rightarrow M$, so dass $\pi^{-1}(x)$ ein Vektorraum der Dimension r ist, eine Struktur eines glatten Vektorraumbündel geben, in dem man noch das Folgende fordert:

- Existenz einer Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von M samt bijektiver Abbildungen $\psi : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, $\alpha \in A$, so dass die Einschränkungen $\psi_\alpha : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^r \stackrel{\text{pt}_2}{=} \mathbb{R}^r$ lineare Isomorphismen sind.
- Für jedes Paar $\alpha, \beta \in A$ hat die Verknüpfung $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$ die Gestalt $(x, v) \mapsto (x, g_{\beta\alpha}(x)v)$ mit einer glatten Abbildung $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{r \times r}$.

Definition 5.2.11. Ein Bündelmorphismus $(\pi_E, E, X) \rightarrow (\pi_D, D, Y)$ ist ein Paar (f, F) bestehend aus einer glatten Abbildung $F : E \rightarrow D$ und einer glatten Abbildung $f : X \rightarrow Y$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & D \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_D \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

und für alle $x \in X$ die Einschränkungen $F : \pi_E^{-1}(x) \rightarrow \pi_D^{-1}(f(x))$ linear ist. Natürlich legt eine fasererhaltende Abbildung $F : E \rightarrow D$ die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ fest.

Ein X -Bündelmorphismus $(\pi_E, E, X) \rightarrow (\pi_D, D, X)$ ist ein Bündelmorphismus (Id_X, F) .

Das Tangentialbündel. Die Menge der Tangentialräume $TM := \coprod_{p \in M} T_p M$ zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : TM \rightarrow M$, die jeder Punkt-Derivation $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ in p den Basispunkt p zuordnet, hat die Struktur eines Vektorraumbündels über M mit $\text{Rang}(TM) = \dim M$: Die lokalen Trivialisierungen werden durch lokale Koordinatenkarten $(U_\alpha, x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)$ auf M wie folgt definiert:

$$\psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) = \coprod_{p \in U_\alpha} T_p M \quad \left(x, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} \Big|_x$$

Die Bündelkartenwechsel werden dann durch die Abbildungen

$$(x, v) \mapsto \left(x, \left(\frac{\partial x_j^\beta}{\partial x_k^\alpha}(x) \right) \cdot v \right)$$

beschrieben, wobei $x_1^\beta(x^\alpha), \dots, x_m^\beta(x^\alpha)$ die Koordinatenfunktionen des Kartenwechsels $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ sind.

Wie bereits in der Bemerkung 5.2.10 erläutert, hat dann $TM = \coprod_{x \in M} T_x M$ die Struktur eines glatten Vektorraumbündels über M . Dieses Bündel heißt das *Tangentialbündel* von M .

Definition 5.2.12. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ eine offene Teilmenge. Jeden glatten Schnitt $X \in \Gamma(U, TM)$ nennt man ein *Vektorfeld* auf U .

Bemerkung 5.2.13. Ist (U, x_1, \dots, x_m) eine Koordinatenumgebung (Karte) auf M , so ist jeder Schnitt in TM über U (d.h., ein Element in $\Gamma(U, TM)$) eindeutig als

$$z \longmapsto \sum \alpha_j(z) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_z$$

darstellbar. Dieser Schnitt ist genau dann glatt, wenn für alle j die Funktionen $\alpha_j : U \rightarrow \mathbb{K}$ ebenfalls glatt sind.

Ist X ein Vektorfeld, so ist definitionsgemäß für alle $p \in M$ die Abbildung $X(p) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Punktderivation. Nach der Wahl einer Karte $U \subset M$ (d.h. lokaler Koordinaten in U) hat dann X die Darstellung $X(p) = \alpha_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$ und kann dann in diesen Koordinaten auch als die Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^{\dim M}$, $p \mapsto (\alpha_1(p), \dots, \alpha_{\dim M}(p))$ interpretiert werden.

5.2.14. Das Differential. Nachdem wir jetzt jedem Punkt p einer Mannigfaltigkeit M einen linearen Raum $T_p M$ zugeordnet haben, kann man jetzt jeder glatten Abbildung $F : M \rightarrow N$ das *Differential* oder *Push-forward* $DF_p = F_*(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ zuordnen: das ist die folgende lineare Abbildung:

geometrische Definition: $F_*(p)[\gamma] := [\gamma \circ F]$
 algebraische Definition: $F_*(p)(v_p) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{K} \quad F_*(p)(v_p)(g) = v_p(g \circ F)$

Sind x_1, \dots, x_k lokale Koordinatenfunktionen auf $U \subset M$ so identifiziert man für jedes $p \in U$ \mathbb{R}^k mit $T_p M$ vermöge der Abbildung $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \sum \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$. Sind jetzt $(U, (x_1, \dots, x_m))$, $(W, (y_1, \dots, y_n))$ zwei Karten auf M und N mit $F(U) \subset W$ so läßt sich F in diesen lokalen Koordinaten durch das Tupel (F_1, \dots, F_n) beschreiben, wobei $F_j = y_j \circ F$. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p)} N \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

wobei die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch die Jacobimatrix $\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(p) \right)$ beschrieben wird.

Im Folgenden sei $\operatorname{div}(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_j}$ die Divergenz eines Vektorfelds X und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

Satz von Gauß-Ostrogradski 5.2.15. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, deren Rand $M = \partial K$ eine $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist. Sei weiter $n_M : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Einheitsnormale, die nach außen (bzgl. K) gerichtet ist. Dann gilt für jedes (glattes) Vektorfeld $X : U(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$:*

$$\int_K \operatorname{div}(X)(y) \, d\lambda(y) = \int_M \langle X(s), n_M(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \, dM$$

Bemerkung 5.2.16. In jedem Punkt $p \in M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es den Tangentialraum $T_p M$ (betrachtet als ein Unterraum in \mathbb{R}^n) und den dazu orthogonalen Raum $N_p M = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp T_p M\}$. Die disjunkte Vereinigung $N_{\mathbb{R}^n/M} = \coprod_{p \in M} N_p M$ hat die Struktur eines Rang-1 VRbündels (das sog. *Normalenbündel*) und die Einheitsnormale ist eins der beiden Schnitte s in diesem Vektorraumbündel, die die Bedingung $\langle s(x), s(x) \rangle = 1 \quad \forall x \in M$ erfüllen.

Der Beweis dieses Satzes ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes, den wir in voller Allgemeinheit am Ende dieser Vorlesung beweisen werden.

5.3. Differentialformen und der d-Operator

Eine 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Objekt, welches dual zu einem Vektorfeld ist. Während ein VF X ein differenzierbarer Schnitt in dem Tangentialbündel TM ist, so ist eine 1-Form η ein Schnitt in dem dualen Bündel T^*M . Das duale VRBündel T^*M besteht aus allen linearen Funktionalen $\eta_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $p \in M$, d.h. $T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$ mit der Projektion $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ $\beta_p \mapsto p$. Die Vektorraumstruktur auf T^*M , d.h. ein Atlas mit Bündelkarten läßt sich wie folgt aus TM gewinnen: Liefert ein Atlas $\{(U_\alpha, x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha)\}$ auf M die lokalen Schnitte (Vektorfelder) $\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}$ über U_α , die faserweise Basen der Tangentialräume T_pM , $p \in U_\alpha$ sind, so bezeichnen wir mit für jedes $p \in U_\alpha$ mit $(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}|_p)^*$ die duale Basis, also Elemente in T_p^*M mit $(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}|_p)^* (\frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}|_p) = \delta_{jk}$. Dann bekommt man die Bündelkarten

$$(\psi_\alpha^*)^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{R}^m \rightarrow (\pi^*)^{-1}(U_\alpha) \quad \text{durch} \quad (p, (\lambda_1, \dots, \lambda_m)) \mapsto \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} \Big|_p \right)^*$$

vgl. 5.2.5. Ein Schnitt $\eta \in \Gamma(M, T^*M)$ (d.h., eine glatte Abbildung $\eta : M \rightarrow T^*M$ mit $\pi \circ \eta = \text{Id}_M$) kann man dann auf eine Vektorfeld X (d.h., einen Schnitt in $\Gamma(M, TM)$) anwenden und das Ergebnis ist eine Funktion auf M : $\eta(X) \in C^\infty(M)$. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, so vereinbaren wir: $\mathcal{E}^0(M) := C^\infty(M)$, $\mathcal{E}^1(M) := \Gamma(M, T^*M)$ Eine 1-Form η , ausgewertet in einem Punkt $p \in M$, ist dann ein Element in T_p^*M , d.h., ein lineares Funktional $\eta_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben oft η_p für $\eta(p)$, genauso wie wir v_p für den Wert eines Vektorfeldes v auf M an der Stelle p schreiben.

d-Operator für 1-Formen. Man definiere jetzt die folgende Abbildung

$$(5.3.1) \quad d : \mathcal{E}^0(M) \rightarrow \mathcal{E}^1(M), \quad df(v_p) := v_p f$$

So z.B., die oben definierte, zu $(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha})_{1 \leq j \leq m}$ duale Basis besteht exact aus den 1-Formen $dx_1^\alpha, \dots, dx_m^\alpha$. In dem Fall $M = \mathbb{R}$ und t der kartesischen Koordinatenfunktion auf M hat jetzt dt die Bedeutung einer 1-Form. Punktweise ist also dt ein lineares Funktional $dt|_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Jede 1-Form auf $M = \mathbb{R}$ hat dann die Gestalt $\eta = f(t) dt$ mit einer differenzierbaren Funktion $f \in E^0(\mathbb{R})$.

5.3.2. Der Pull-back. Das Pull-back von $F : M \rightarrow N$, ist eine Abbildung $F^* : \mathcal{E}^j(N) \rightarrow \mathcal{E}^j(M)$, $j = 0, 1$ so dass

$$\begin{aligned} F^*(f) &:= f \circ F & \text{für } j = 0 \\ F^*(\eta)(v_p) &:= \eta(F_*(v_p)) & \text{für } j = 1 \end{aligned}$$

Hierbei ist $F_* : TM \rightarrow TN$ der Push-forward (Differential) wie in 5.2.14.

Vorsicht! Während ein Push-forward eine Abbildung ist, die für jedes $p \in M$ die Tangentialvektoren in T_pM auf Tangentialvektoren in $T_{F(p)}N$ abbildet, läßt sich damit für ein allgemeines F keine Abbildung, die Vektorfelder auf M auf Vektorfelder auf N abbildet, gewinnen. Der Pull-back jedoch bildet globale Schnitte (1-Formen) in T^*N auf globale Schnitte in T^*M ab, läßt sich aber i.A. nicht als ein Bündelmorphismus $T^*N \rightarrow T^*M$ (vgl 5.2.11) erklären.

5.3.3. Beispiel. Wir berechnen die Bündelkartenwechsel für die Mannigfaltigkeit $M = S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$. Ein differenzierbarer Atlas auf S^m könnte etwa aus den zwei Karten $\varphi_N : S^m \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^m \cong \{(y, 0) \in \mathbb{R}^{m+1} : y \in \mathbb{R}^m\}$ und $\varphi_S : S^m \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestehen, die durch die stereographischen Projektionen jeweils vom Nordpol $N = (0, \dots, 0, 1)$ und Südpol $S = (0, \dots, 0, -1)$ auf die äquatoriale Ebene gegeben sind. Wir wählen hier einen anderen Satz von Karten: Für alle $j \in \{1, \dots, m+1\}$ sei

$$U_j^+ := \{x \in S^m : x_j > 0\} \quad U_j^- := \{x \in S^m : x_j < 0\}$$

sowie $\varphi_j^\pm : U_j^\pm \rightarrow B(0) \subset \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{m+1})$ (und damit $(\varphi_j^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_{j-1}, \pm \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_j, \dots, y_m)$) Z.B. für $j < k$ sowie $U_{jk} := U_j^+ \cap U_k^+$ sieht der Kartenwechsel

auf S^m folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccc}
 U_j^+ & \subset M \supset & U_k^+ \\
 \cup & & \cup \\
 U_{jk} & & U_{jk} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{y \in B(0) : y_{k-1} > 0\} = \varphi_j^+(U_{jk}) & & \varphi_k^+(U_{jk}) = \{y \in B(0) : y_j > 0\} \\
 (y_1, \dots, y_m) & \xrightarrow{\varphi_k^+ \circ (\varphi_j^+)^{-1}} & (y_1, \dots, y_{j-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_j, \dots, y_{k-2}, y_k, \dots, y_m) \\
 & & (\Phi_1, \dots, \dots, \dots, \Phi_m)
 \end{array}$$

Bzgl. der Koordinatenfunktionen y_1, \dots, y_m auf jedem U_j^\pm (die durch die Karte φ_j^\pm induziert werden) ist für jedes $p \in U_j^\pm$ $(\frac{\partial}{\partial x_k}|_p)_{1 \leq k \leq m}$ eine Basis von $T_p M$, während dy_1, \dots, dy_m die duale Basis von $T_p^* M$ ist. Die damit verbundenen Identifizierungen $T_p M \cong \mathbb{R}^m$ sowie $T_p^* M \cong \mathbb{R}^m$ induzieren die entsprechenden Bündelkarten. Die Bündelkartenwechsel sehen dann folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccc}
 U_j^+ \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi_j^{-1}} TM \xleftarrow{\psi_k^{-1}} & U_k^+ \times \mathbb{R}^m \\
 \cup & & \cup \\
 U_{jk} \times \mathbb{R}^m & \cong TU_{jk} \cong & U_{jk} \times \mathbb{R}^m \\
 (p, v) & \longrightarrow & (p, g_{kj}(p)(v)) \\
 & & g_{kj}(y) = \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_\beta}(p) \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq m}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 U_j^+ \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi_j^{-1}} T^*M \xleftarrow{\psi_k^{-1}} & U_k^+ \times \mathbb{R}^m \\
 \cup & & \cup \\
 U_{jk} \times \mathbb{R}^m & \cong T^*U_{jk} \cong & U_{jk} \times \mathbb{R}^m \\
 (p, v) & \longrightarrow & (p, h_{kj}(p)(v)) \\
 & & h_{kj}(y) = \left(\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_\beta}(p) \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq m} \right)^{-1}
 \end{array}$$

Ist also $v = (v_1, \dots, v_m)$, $g_{kj}(p)(v) = (w_1, \dots, w_m)$ sowie $h_{kj}(p)(v) = (u_1, \dots, u_m)$ sowie seien y_1, \dots, y_m die lokalen Koordinatenfunktionen auf U_j^+ und (z_1, \dots, z_m) die lokalen Koordinatenfunktionen auf U_k^+ , so gilt etwa für die Darstellungen eines Tangentialvektors $X_p \in T_p M$ in den verschiedenen Bündelkarten:

$$\sum_{\alpha=1}^m v_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \Big|_p = X_p = \sum_{\alpha=1}^m w_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \Big|_p$$

Analog gilt dann für eine 1-Form η , ausgewertet in einem Punkt $p \in U_{jk}$ (d.h. $\eta_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein lineares Funktional)

$$\sum_{\alpha=1}^m v_\alpha dy_\alpha \Big|_p = \eta_p = \sum_{\alpha=1}^m u_\alpha dz_\alpha \Big|_p$$

Kurvenintegrale. Ein Vorteil der 1-Formen gegenüber von Funktionen ist, dass man 1-Formen entlang beliebiger (differenzierbaren) Kurven auf abstrakten Mannigfaltigkeiten integrieren lassen kann. Funktionen dagegen lassen sich nicht auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit M entlang von Kurven integrieren, da i.A. keine "Länge" von dem Geschwindigkeitsfeld $\dot{\gamma} : I \rightarrow TM$ erklärt werden kann.

Für $\eta \in \mathcal{E}^1(M)$ und $\gamma : I \rightarrow M$ definieren wir

$$(5.3.4) \quad \int_\gamma \eta := \int_I \gamma^*(\eta) = \int_I \eta(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_I f(t) dt \quad \dot{\gamma}(t) = \gamma_* \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=t}$$

wobei das Integral auf der rechten Seite wie ein Riemannsches oder Lebesgueintegral interpretiert wird. Die bis jetzt hingenommene symbolhafte Schreibweise $f dt$ bekommt jetzt durch die obigen Erklärungen die Bedeutung einer 1-Form auf $I \subset \mathbb{R}$. Das oben definierte Kurvenintegral von 1-Formen läßt sich dann sofort auch für stückweise stetig differenzierbare Kurven ausdehnen: Sind $\gamma_j := \gamma|_{I_j}$ die C^1 -Einschränkungen, dann

$$\int_{\gamma} \eta := \sum_j \int_{I_j} \gamma_j^*(\eta) = \int_{I_j} f(t) dt$$

Die Objekte die auf k -dimensionalen abstrakten Mannigfaltigkeiten integriert werden können sind die sog. k -Formen. Wir beginnen mit ein Paar definitionen aus der linearen Algebra.

Definitionen 5.3.5. Es sei V ein Vektorraum. Dann bezeichnen wir mit $\text{Alt}^k(V)$ die Menge aller k -fach multilinearen Abbildungen $\eta : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$, welche alternierend sind, d.h., für beliebige $v_j \in V$ und jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ $\eta(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma) \cdot \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ gilt. Die Menge $\text{Alt}^k(V)$ zusammen mit der punktweise Addition und der Skalarmultiplikation ist ein $\binom{\dim V}{k}$ -dimensionaler Vektorraum.

Auf der Menge $\bigoplus_{j=0}^{\dim V} \text{Alt}^j(V)$ definiert man ferner das folgende *Dachprodukt*: Für $\eta \in \text{Alt}^k(V)$ und $\omega \in \text{Alt}^{\ell}(V)$ gilt $\eta \wedge \omega \in \text{Alt}^{k+\ell}(V)$, wobei

$$\eta \wedge \omega (v_1, \dots, v_{k+\ell}) := \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \text{sign}(\sigma) \cdot \eta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \omega(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

Man beachte die folgenden Rechenregel:

- i. Für beliebige $\eta \in \text{Alt}^k(V)$, $\omega \in \text{Alt}^{\ell}(V)$, $\mu \in \text{Alt}^m(V)$: $(\eta \wedge \mu) \wedge \omega = \eta \wedge (\mu \wedge \omega)$
- ii. Für beliebige $\eta \in \text{Alt}^k(V)$, $\omega \in \text{Alt}^{\ell}(V)$, $\eta \wedge \omega = (-1)^{k\ell} \omega \wedge \eta$
- iii. Für beliebige $\eta_i \in \text{Alt}^1(V) = V^*$ und $v_j \in V$ gilt

$$\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n (v_1, \dots, v_n) = \det (\eta_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Genauso, wie in der Definition des Tangential- und des Kotangentialbündels von M definiert man das sog. Vektorraumbündel der k -Formen als die disjunkte Vereinigung $E^k M = \coprod_{p \in M} \text{Alt}^k(T_p M)$, versehen mit einer geeigneten Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass $\pi : E^k M \rightarrow M$, $\eta_p \mapsto p$ ein VRBündel ist. Eine k -Form η ist dann ein glatter Schnitt in diesem Bündel. Anders ausgedrückt: Eine k -Form ist eine Abbildung η , die jedem Punkt $p \in M$ eine k -fach alternierende Abbildung $\eta_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet, und diese Zuordnung variiert glatt, d.h., für beliebige glatte Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(M, TM)$ sind die Funktionen $\eta(X_1, \dots, X_k) \in C^\infty(M)$ ebenfalls glatt.

Die Menge aller (glatter) k -Formen auf M bezeichnet man mit $\mathcal{E}^k(M) = \Gamma(M, E^k M)$.

Der d-Operator für k-Formen. Man erweiter d in (5.3.1) zu einer \mathbb{R} -linearen Abbildung

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E}^k(M) &\rightarrow \mathcal{E}^{k+1}(M) && \text{durch die folgende Def.:} \\ (5.3.6) \quad d\eta (X_1, \dots, X_k, X_{k+1}) &:= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+1-j} X_j(\eta(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

wobei X_1, \dots, X_{k+1} beliebige Vektorfelder auf M sind und das Symbol \widehat{Y} das Weglassen von Y aus der Liste A, B, \dots, Y, Z bezeichnet, z.B.: $\mu(X, \widehat{Y}, Z) = \mu(X, Z)$.

5.3.7. Rechenregeln

- i. $d \circ d = 0$
- ii. $d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^{\deg \eta} \eta \wedge d\omega$; insbesondere $d(f\eta) = df \wedge \eta + f \cdot d\eta$ für jede Funktion $f \in \mathcal{E}^0(M)$.
- iii. d ist ein lokaler Operator, d.h., $d\eta|_U = d\omega|_U$ falls die beiden k -Formen $\eta, \omega \in \mathcal{E}^k(M)$ auf U übereinstimmen.

Beschreibung in lokalen Koordinaten. Sind (U, x_1, \dots, x_n) lokale Koordinatenfunktionen auf M , so sind dx_1, \dots, dx_n 1-Formen auf $U \subset M$ und $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ eine k -Form, wobei $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Die Menge aller solchen $dx_I := dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}|_p$, wobei $I = \{j_1, \dots, j_k\}$, so dass $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ und die I -s aller Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchlaufen, bilden eine Basis des Vektorraumes $\text{Alt}^k(T_p M)$. Eine beliebige k -Form auf U läßt sich dann durch

$$\eta|_U = \sum_I f_I \cdot dx_I$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $f_I \in \mathcal{E}^0(U)$ beschreiben. Ferner folgt aus 5.3.7:

$$d\left(\sum_I f_I \cdot dx_I\right) = \sum_I df_I \wedge dx_I$$

So, z.B., sei $M := \mathbb{R}^3$ mit den globalen kartesischen Koordinatenfunktionen x_1, x_2, x_3 . Dann bildet punktweise (für jedes $p \in \mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned} dx_1, dx_2, dx_3 & \text{ eine Basis von } T_p^* M = E_p^1 M \\ dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2 & \text{ eine Basis von } E_p^2 M \\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 & \text{ eine Basis von } E_p^3 M \end{aligned}$$

Bezüglich der obigen Basen lassen sich beliebige 1- und 2-Formen mit den 3-Tupeln von Funktionen identifizieren, während $\mathcal{E}^3(M)$ mit $\mathcal{E}^0(M)$ vermöge $fdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \mapsto f$ identifiziert wird. Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^3)$ entspricht dann $df \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^3)$ dem Gradienten $\text{grad } f \in (\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^3))^3$, $d : \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^3)$ dem Operator rot und schließlich $d : \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{E}^3(\mathbb{R}^3) \cong \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^3)$ der Divergenz:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E}^0 & \xrightarrow{\text{grad}} & (\mathcal{E}^0(M))^3 & \xrightarrow{\text{rot}} & (\mathcal{E}^0(M))^3 & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{E}^0(M) \\ \parallel & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{E}^0(M) & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^1(M) & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^2(M) & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^3(M) \end{array}$$

5.3.8. Orientierung. Man spricht von zwei möglichen Orientierungen in \mathbb{R}^2 nämlich im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn. Genauso spricht man von zwei Orientierungen in \mathbb{R}^3 nämlich nach der rechten oder der linken Drei-Finger-Regel. Ganz allgemein wird eine Orientierung eines Vektorraumes durch eine geordnete Basis dieses Vektorraumes festgelegt: Es sei $\mathcal{B}(V)$ die Menge aller Basen des reellen VR V . (Dieser Begriff läßt sich nicht auf komplexe Vektorräume übertragen.) Auf dieser Menge sei die folgende Äquivalenzrelation eingeführt: $(v_1, \dots, v_m) \sim_{\text{orient}} (w_1, \dots, w_m)$ genau dann wenn die lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ mit $A(v_j) = w_j$ für alle j positive Determinante hat. Diese Äquivalenzrelation zerlegt $\mathcal{B}(V)$ in genau zwei Äquivalenzklassen, genannt auch Orientierungen von V . Zwei Basen heißen dann *gleichorientiert* wenn sie äquivalent bzgl. der obgen Äquivalenzrelation sind. Ist z.B. e_1, e_2, e_3 die kanonische Basis in \mathbb{R}^3 , so sind (e_1, e_2, e_3) sowie (e_2, e_3, e_1) äquivalent (gleichorientiert). dagegen sind (e_1, e_2, e_3) und $(-e_1, e_2, e_3)$, oder (e_1, e_2, e_3) und (e_2, e_1, e_3) nicht

gleichorientiert. Die Wahl einer der beiden obigen Äquivalenzklassen auf $\mathcal{B}(V)$ nennt man dann die Wahl einer *Orientierung* auf V . Eine Orientierung auf V wird mit o_V bezeichnet. Die zu o_V umgekehrte Orientierung wird mit o_V^c bezeichnet.

Bem. Eine nichttriviale m -fach alternierende Abbildung $\omega \in \text{Alt}^m(V)$ definiert eine Orientierung auf V , $m = \dim V$: Dabei liegt (v_1, \dots, v_m) in $o_V = o_\omega$ falls $\omega(v_1, \dots, v_m) > 0$. Man überlege sich leicht, dass für jede lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ die folgende Formel gilt: für jede Basis v_1, \dots, v_m von V haben wir

$$\omega(A(v_1), \dots, A(v_m)) = \det A \cdot \omega(v_1, \dots, v_m)$$

Definition 5.3.9. Es sei jetzt M glatte Mannigfaltigkeit und TM ihr Tangentialbündel. M heißt *orientierbar*, falls man in jedem Tangentialraum $T_p M$ eine Orientierung $o_M(p) := o_{T_p M}$ so wählen kann, dass die folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist:

Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine zusammenhängende Umgebung $U(p)$ und stetige, faserweise linear unabhängige Schnitte (Vektorfelder) $X_1, \dots, X_m \in \Gamma(U, TM)$, so dass $(X_1(p), \dots, X_m(p)) \in o_p$ für alle $p \in U$ gilt.

Ist eine Mannigfaltigkeit orientierbar, so hat man eine Wahl zwischen (M, o_M) und (M, o_M^c) . Eine orientierbare Mannigfaltigkeit M mit einer kompatiblen Wahl der Orientierungen o_M heißt *orientiert*.

Eine Koordinatenkarte (U, x_1, \dots, x_m) auf einer orientierten Mannigfaltigkeit (M, o_p) (U zusammenhängend) heißt *positiv orientiert*, falls $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}) \in o_M(p)$ für alle $p \in U$ gilt und andernfalls *negativ orientiert*.

Lemma 5.3.10. Es sei M eine glatte m -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- i) Die Mannigfaltigkeit M ist orientierbar.
- ii) Es gibt einen Atlas \mathcal{A} von M , so dass alle Kartenwechsel $\phi_{\beta\alpha}$ die Bedingung $\det(\text{Jac}\phi_{\beta\alpha}) > 0$ auf $\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ erfüllen.
- iii) Es existiert eine nirgends verschwindende m -Form $\omega \in \mathcal{E}^m(M)$.

Es sei $F : (M, o_p) \rightarrow (N, o'_q)$ ein Diffeomorphismus zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten. Er heißt *orientierungserhaltend* in p falls $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ eine orientierungserhaltende lineare Abbildung ist. F heißt *orientierungserhaltend* falls F orientierungserhaltend in jedem Punkt p ist.

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ eine auf einer L-messbaren Teilmenge D von dem n -dimensionalen Intervall $[a, b] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ definierte Lebesgue-integrierbare Funktion, so definiert man mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f_D(x) d\lambda(x_1, \dots, x_n) &= \int_D f(x) d\lambda(x_1, \dots, x_n) := \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f_D(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots dx_n \quad f_D(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ 0 & \text{für } x \notin D \end{cases} \end{aligned}$$

Ist η eine glatte n -Form auf \mathbb{R}^n mit kompaktem Träger $K = \text{supp } \eta$, so gilt $\eta = f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ mit $\text{supp } f = \text{supp } \eta$. Wählt man ein kompaktes Intervall $[a, b] \supset K$, so sei

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_{[a,b]} f_K(x) d\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

Das folgende Lemma erklärt das Verhalten von Integralen unter Diffeomorphismen:

Lemma 5.3.11. *Es seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Integrationsbereiche, D_1° zusammenhängend und $F : D_1 \rightarrow D_2$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt für jede n -Form η , definiert auf D_2 :*

$$\int_{D_2} \eta = \begin{cases} \int_{D_1} F^* \eta & \text{falls } F \text{ orientierungserhaltend ist} \\ - \int_{D_1} F^* \eta & \text{falls } F \text{ orientierungsumkehrend ist} \end{cases}$$

Jetzt sind wir in der Lage Integrale von beliebigen Formen mit kompakten Träger auf beliebigen orientierten Mannigfaltigkeiten zu definieren:

Lemma und Definition 5.3.12. *Es sei (M, o_p) eine orientierte m -Mannigfaltigkeit und $\eta \in \mathcal{E}^m(M)$ eine Form mit kompaktem Träger K . Für jede endliche Überdeckung $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq \ell}$ von K mit positiv orientierten Koordinatenkarten und eine der Überdeckung $\{U_\alpha, (M \setminus K)\}$ untergeordnete glatte Zerlegung der 1, $(\chi_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq \ell}$, χ_0 , (mit $\text{supp } \chi_0 \cap K = \emptyset$), die Summe*

$$\int_M \eta := \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\alpha^{-1})^* (\chi_\alpha \eta)$$

hängt nicht von der Wahl der Karten (U_α, ϕ_α) und der glatten Zerlegung der 1. Damit ist das Integral $\int_M \eta$ wohldefiniert.

Es sei hierbei explizit erwähnt, dass nur auf einer orientierten m -dimensionalen Mannigfaltigkeit das Integral einer m -Form η definiert werden kann.

Um den allgemeinen Satz von Stokes zu formulieren, fehlt uns nur noch der Begriff der induzierten Orientierung einer Randmannigfaltigkeit.

Es sei (M, o_M) eine m -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ ein Kompaktum, dessen Rand ∂K eine $m - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Dann induziert o_M eine Orientierung $o_{\partial K}$ wie folgt: Es sei $v : U(\partial K) \rightarrow TM$ ein beliebiges Vektorfeld auf einer Umgebung von ∂K , welches transversal zu ∂K ist (d.h. $v_p \notin T_p(\partial K)$ für alle $p \in \partial K$) und nach außen von K zeigt. Die induzierte Orientierung $o_{\partial K}(p)$ ist dann durch jede Basis $v_1, \dots, v_{m-1} \in T_p(\partial K)$ bestimmt, so dass $(v_p, v_1, \dots, v_{m-1}) \in o_M(p)$ gilt. Sie ist unabhängig von der Wahl des nach außen von K weisenden transversalen Vektorfeldes v .

Satz von Stokes 5.3.13. *Es sei (M, o_M) eine m -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit, $\eta \in \mathcal{E}^{m-1}(M)$ eine $(m - 1)$ -Form und $K \subset M$ ein Kompaktum, dessen Rand eine $m - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M ist. Ferner sei $j : \partial K \rightarrow M$ die kanonische Inklusion. Dann gilt*

$$\int_M d\eta = \int_{\partial K} i^* \eta$$

Hierbei trägt ∂K die von M induzierte Orientierung.

Proof: