Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
27.04.2011
Blatt 03

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei $A = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} A^p$ eine graduierte $\mathbf{R}$-Algebra und $I = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} I^p$ ein homogenes zweiseitiges Ideal. Sei weiter $Q := A/I$, $Q^p := A^p/I^p$ und $j^p\colon Q^p \to Q$ die natürliche Abbildung. Zeigen Sie

   (a) j^p ist injektiv;

   (b) $(j^p(Q^p))_{p\in\mathbf{Z}}$ ist eine Graduierung auf Q und die kanonische Projektion $\pi\colon A \to Q$ ist damit graduiert.

2. (Koordinatenfreie Beschreibung der Spur eines Endomorphismus') Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension. Zeigen Sie:

   (a) Es gibt genau einen Homomorphismus T von $V^* \otimes V$ nach $\mathbf{R}$, so dass für $\lambda \in V^*$ und $v \in V$ gilt: $T(\lambda \otimes v) = \lambda(v)$.

   (b) Sei $S\colon V^* \otimes V \to \mathrm{End}(V)$ der Isomorphismus, der für jedes $\lambda \in V^*$ und $v, w \in V$ folgendes erfüllt: $S(\lambda \otimes v)(w) = \lambda(w)v$. Zeigen Sie, dass für den Homomorphismus $T \circ S^{-1}\colon \mathrm{End}(V) \to \mathbf{R}$ gilt: $T \circ S^{-1} = \mathrm{spur}$.

3. Sei V ein Vektorraum und $(T(V), i)$ seine Tensoralgebra.

   (a) Sei $I \subseteq T(V)$ das zweiseitige Ideal, welches von allen Elementen der Form $v\otimes w - w\otimes v$ $(v, w \in V)$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass I homogen ist und damit $Sym(V) := T(V)/I$ zu einer graduierten Algebra macht.

   (b) Sei $\pi\colon T(V) \to \mathrm{Sym}(V)$ die kanonische Projektion und $v \odot w := \pi(v\otimes w)$ für $v, w \in V$. Sei weiter $j\colon V \to \mathrm{Sym}(V)$, $j = \pi \circ i$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(V)$ kommutativ ist und formulieren (und beweisen) Sie eine universelle Eigenschaft für $(\mathrm{Sym}(V), j)$. Es heißt $(\mathrm{Sym}(V), j)$ die *symmetrische Algebra über* V.

   (c) Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass es (genau) einen Algebra-Isomorphismus $\Phi\colon K[X_1, \dots, X_n] \to \mathrm{Sym}(V)$ gibt, der X_k gerade auf $e_k \in V \subseteq \mathrm{Sym}(V)$ abbildet, $k = 1 \dots, n$ (wobei V via $j\colon V \to \mathrm{Sym}(V)$ als Unterraum von $\mathrm{Sym}(V)$ aufgefasst wird).

Abgabe: 04. Mai 2011, 9 Uhr