Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
13.04.2011
Blatt 1

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei A eine Menge, $\mathbb{F}(A)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum, der von A frei erzeugt wird, also
$$\mathbb{F}(A) := \left\{ \sum_{a \in A} r_a a : r_a \in \mathbb{R} \text{ und } r_a = 0, \text{ für fast alle } a \in A \right\},$$
und $\iota : A \to \mathbb{F}(A)$, $a \mapsto 1a$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}(A), \iota)$ folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt: Ist V ein reeller Vektorraum und $j : A \to V$ eine Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $T : \mathbb{F}(A) \to V$ mit $T \circ \iota = j$.

2. Seien V, W und U $\mathbb{R}$-Vektorräume und $s : V \times W \to V \otimes W$ die kanonische bilineare Abbildung. Für jede bilineare Abbildung $\sigma : V \times W \to U$ sei $T_\sigma : V \otimes W \to U$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $T_\sigma \circ s = \sigma$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung
$$T : \mathrm{Bil(V, W; U)} \to \mathrm{Hom(V \otimes W, U)} : \sigma \mapsto \mathrm{T}_\sigma$$
(mit den natürlichen $\mathbb{R}$-Vektorraumstrukturen auf $\mathrm{Bil(V, W; U)}$ und $\mathrm{Hom(V \otimes W, U)}$) ein Isomorphismus ist.

3. Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume und $s : V \times W \to V \otimes W$ sowie $t : W \times V \to W \otimes V$ die kanonischen bilinearen Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\iota : V \times W \to W \times V : (v, w) \mapsto (w, v)$ einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Phi : V \otimes W \to W \otimes V$ mit $\Phi \circ s = t \circ \iota$ induziert.

4. Zeigen Sie, dass für drei $\mathbb{R}$-Vektorräume V_1, V_2 und W die beiden $\mathbb{R}$-Vektorräume $(V_1 \oplus V_2) \otimes W$ und $(V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$ *kanonisch isomorph* sind.

Abgabe: Mittwoch, 20. April 2011, 9 Uhr