Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
22.06.2011
Blatt 10

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei M ein topologischer Raum. Es folgen drei Definitionen:

   (a) Eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha\in A}$ heißt *lokal endlich*, wenn jedes $p \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ für nur endlich viele $\alpha \in A$ gilt.

   (b) Ist $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung, so heißt eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine *Verfeinerung von* $\mathcal{U}$, wenn es eine Abbildung $\iota : A \to I$ gibt mit $V_\alpha \subseteq U_{\iota(\alpha)}$, für alle $\alpha \in A$.

   (c) M heißt *parakompakt*, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eine lokal endliche Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$ besitzt.

   Zeigen Sie: Ist M ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Topologie, so ist M parakompakt. (Hinweis: Ist (G_k) eine kompakte Ausschöpfung von M, so betrachte man die kompakten Mengen in $\overline{G_k} \setminus G_{k-1}$ in $G_{k+1} \setminus \overline{G_{k-1}}$.)

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $A \subseteq M$ abgeschlossen mit $A \subseteq U$. Zeigen Sie, dass es eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gibt mit $f|_A \equiv 1$ und $f|_{M\setminus U} \equiv 0$.

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Riemannsche Metrik (auf M)* ist ein glatter globaler Schnitt g im Bündel $T^{(0,2)}M$, so dass für jedes $p \in M$ die Bilinearform $g_p : TM_p \times TM_p \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt ist. Zeigen Sie, dass jede glatte Mannigfaltigkeit M eine Riemannsche Metrik besitzt. (Hinweis: Man konstruiere eine offene Überdeckung (U_i) von M, so dass jedes U_i eine Riemannsche Metrik $\tilde{g}_i$ besitzt. Anschließend benutze man eine Teilung der 1 (λ_i) mit $\mathrm{supp}(\lambda_\mathrm{i}) \subseteq \mathrm{U_i}$, schneide die $\tilde{g}_i$ zu globalen Bilinearformen $g_i = \lambda_i \tilde{g}_i$ zusammen und setze $g = \sum_i g_i$.)

4. Sei (M, g, o) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Ist dann für eine orientierte Karte $x : U \to V$

   $$g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

   $g_{ij} \in \mathcal{E}(V)$ $(1 \leq i, j \leq n)$, so setze man $\omega|_U := \sqrt{\det(g_{ij})_{ij}}(x) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ und zeige, dass dies eine globale n-Form ohne Nullstellen definiert. (ω heißt die von g *induzierte Volumenform auf* M.)

Abgabe: Mittwoch, 29. Juni 2011, 9 Uhr