Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
29.06.2011
Blatt 11
Abgabe: 06.07.11

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $u \in V$. Die *äußere Multiplikation mit u* ist der Endomorphismus $\varepsilon(u)\colon \bigwedge V \to \bigwedge V$ mit $\varepsilon(u)v = u \wedge v$, für $v \in \bigwedge V$. Zeigen Sie, dass unter der natürlichen Isomorphie zwischen $(\bigwedge V)^*$ und $\bigwedge(V^*)$ die äußere Multiplikation dual ist zu der inneren Multiplikation $i(u)\colon \bigwedge V^* \to \bigwedge V^*$ aus der Vorlesung, d.h.: für alle $\alpha \in \bigwedge V^*$ und $v \in \bigwedge V$ gilt:
$$\langle i(u)\alpha, v\rangle = \langle \alpha, \varepsilon(u)v\rangle.$$

2. Sei $(V\langle\cdot,\cdot\rangle, o)$ ein euklidischer und orientierter Vektorraum der Dimension $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Für eine orientierte Orthonormal-Basis $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ von V setzen wir das *Volumenelement* $\omega \in \bigwedge^n V \setminus 0$ fest durch
   $$\omega := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$
   Zeigen Sie, dass ω nicht von der Wahl der orientierten Basis $\mathcal{B}$ abhängt.
   (b) Für $p = n$ setzen wir nun $*\colon \bigwedge^n V \to \bigwedge^0 V = \mathbf{R}$ fest durch $*\omega = 1$. Zeigen Sie nun, dass für $0 \le p \le n$ durch
   $$\bigwedge^p V \times \bigwedge^{n-p} V \to \mathbf{R},\ (v,w) \mapsto *(v \wedge w),$$
   eine nicht-entartete Bilinearform gegeben wird.
   (c) Zeigen Sie schließlich, dass es für jedes $0 \le p \le n$ eine lineare Abbildung $*\colon \bigwedge^p V \to \bigwedge^{n-p} V$ gibt (genannt der *Hodge-Stern-Operator*), so dass für alle $v, w \in \bigwedge^p V$ gilt:
   $$\langle v, w\rangle = *(v \wedge *w).$$
   (Hier bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das induzierte Skalarprodukt auf $\bigwedge^p V$.)

3. Sei (M, g, o) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (vgl. Aufgabe 4, Blatt 10).
   (a) Für jedes $p \in M$ sei $\omega_p := *(1) \in \bigwedge^n TM_p^*$, wo der Stern-Operator mit dem auf TM_p^* induzierten Skalarprodukt gemäß Aufgabe 2 gebildet ist. Zeigen Sie, dass ω die Volumenform von Aufgabe 4, Blatt 10 ist.
   (b) Sei nun M mit Rand und $n\colon \partial M \to TM|\partial M$ das eindeutig bestimmte äußere Einheitsnormalenfeld an ∂M. Zeigen Sie dann die folgende Version des Gaußschen Divergenzsatzes auf M: Ist $X \in \mathcal{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld mit kompaktem Träger, so gilt:
   $$\int_M \operatorname{div}(X) = \int_{\partial M} \langle X, n\rangle,$$
   wobei bzgl. der von den Metriken auf M bzw. ∂M induzierten Volumenformen integriert wird.