Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
06.07.2011
Blatt 12

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times k; \mathbb{R})$ gilt

$$\det(A^t B) = \sum_I \det(A^I) \det(B^I),$$

wobei sich die Summe rechts über alle k-elementigen Teilmengen $I = \{i_1, ..., i_k\}$ von $\{1, ..., n\}$ erstreckt und $A^I \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{R})$ die Untermatrix von A ist, die aus den Zeilen $i_1, ..., i_k$ besteht. (Hinweis: Prüfen Sie die Formel zunächst für den Fall, wo B die kanonischen Einheitsvektoren $e_{j_1}, ..., e_{j_k}$ in den Spalten hat und $\{j_1, ..., j_k\} \subseteq \{1, ..., n\}$ beliebig ist.)

2. Seien $v_1, ..., v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $A \in \mathrm{Mat}(n \times (n-1); \mathbb{R})$ die Matrix, die $v_1, ..., v_{n-1}$ als Spalten hat. Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ sei $A^i \in \mathrm{Mat}_{n-1}(\mathbb{R})$ die Untermatrix von A, bei der die i-te Zeile gestrichen ist und es sei $x^i := (-1)^{i-1} \det(A^i)$. Wir setzen dann

$$\nu := v_1 \times ... \times v_{n-1} := (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

   (a) Zeigen Sie, dass ν bzgl. des Standard-Skalarprodukts senkrecht auf $v_1, ..., v_{n-1}$ steht und genau dann verschwindet, wenn $(v_1, ..., v_{n-1})$ linear abhängig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass bzgl. des Standard-Skalarprodukts und der Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^n$

$$||\nu|| = \sqrt{\det(A^t A)}$$

   ist und im Falle $\nu \neq 0$ die Basis $(\nu, v_1, ..., v_{n-1})$ von $\mathbb{R}^n$ positiv orientiert ist.

3. (a) Zeigen Sie folgenden *Integralsatz von Green*: Ist $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand und sind $f, g : K \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen auf K, so gilt:

$$\int_{\partial K} (f dx + g dy) = \int_K \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

   (b) Zeigen Sie damit den *Integralsatz von Cauchy*: Ist $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $f : K \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so gilt:

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0.$$

Abgabe: Mittwoch, 13. Juli 2011, 9 Uhr