Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
13.07.2011
Blatt 13

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld. Sei $x \in U$, $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x|| = r\}$, $\nu : S_R(x) \to \mathbb{R}^n$ die äußere Einheitsnormale und $\frac{1}{vol(S_r(x))} \int_{S_r(x)} \langle X, \nu \rangle dS$ *der mittlere Durchfluss* von X durch $S_r(x)$ (für $r > 0$ klein genug). Zeigen Sie, dass der Grenzwert für $r \mapsto 0$ existiert und dass gilt:
$$div(X)(x) = \lim_{r \mapsto 0} \frac{1}{vol(S_r(x))} \int_{S_r(x)} \langle X, \nu \rangle dS.$$
   (b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $X : U \to \mathbb{R}^3$ glatt, $x \in U$ und $||\nu|| = 1$. Formulieren und beweisen Sie ein ähnliches Resultat wie unter (a) mit Hilfe des klassischen Satzes von Stokes für $\langle rotX(x), \nu \rangle$.

2. Sei M eine orientierbare , kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion von M auf ∂M geben kann.

3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und für jedes $p \in M$ sei $\#_p : TM_p^* \to TM_p$ der durch g_p induzierte Isomorphismus. Man definiert dann für jede glatte Funtion $f \in \mathcal{E}(M)$ ihren *Gradienten* durch
$$grad(f)(p) := \#_p(df_p).$$
Sei nun $x : U \to V$ eine Karte von M, $(g_{ij}(x))_{ij}$ die Koordinatendarstellung von $g|_U$ bzgl x, d.h. $g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, und sei $f \in \mathcal{E}(V)$ die Koordinatendarstellung von $f|_U$. Zeigen Sie, dass dann die Koordinatendarstellung von $X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $\xi^i \in \mathcal{E}(V)$ folgendes erfüllt:
$$\xi^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$
Hierbei bezeichne (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix, $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

4. Sei (M, g, o) eine orientierte, Riemannsche Mannnigfaltigkeit und $* := (*_p)_{p \in M}$ die Familie der induzierten Sternoperatoren $*_p : \bigwedge TM_p^* \to \bigwedge TM_p^*$ (vgl Blatt 11). Man definiert dann den *Laplace-Beltami-Operator* $\Delta : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ durch
$$\Delta f := * \circ d \circ * \circ d(f).$$
Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathcal{E}(M)$ gilt
$$\Delta f = div(grad(f))$$
und damit dann auch die Koordinatendarstellung von Δ: Ist $x : U \to V$ eine Karte sowie f und (g_{ij}) die lokalen Beschreibungen von $f|_U$ bzw $g|_U$ (sowie im Folgenden auch $g = \det(g_{ij})$), so gilt für die lokale Beschreibung von $\Delta f|_U$:
$$\Delta f|_U = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}).$$

Abgabe (für diejenigen, die noch zusätzliche Punkte wollen oder brauchen): Mittwoch, 20. Juli 2011, 12 Uhr, Briefkasten von F. Schmidt im Postzimmer