Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
20.04.2011
Blatt 2

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei $V = W = \mathbb{R}^2$, (e_1, e_2) die kanonische Basis und $(e_i \otimes e_j)_{i,j=1,2}$ die induzierte Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass ein Tensor $t = z^{ij} e_i \otimes e_j \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ genau dann in der Form $v \otimes w$ mit $v, w \in \mathbb{R}^2$ dargestellt werden kann, wenn gilt::
$$z^{11} z^{22} = z^{12} z^{21}.$$

2. Seien V und W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $T : V^* \otimes W^* \to \mathrm{Bil(V, W; \mathbb{R})}$ aus der Vorlesung ein Isomorphismus ist.

3. Sei I eine Indexmenge und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass die Konstruktionen $\left(\prod_{i \in I} V_i, (\pi_i)_{i \in I}\right)$ bzw. $\left(\sum_{i \in I} V_i, (\iota_i)_{i \in I}\right)$ aus der Vorlesung die universellen Eigenschaften eines Produktes bzw. einer Summe erfüllen.

4. Seien $p, q \in \mathbb{N}_0$ und V ein reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass kanonisch isomorph sind:
$$\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p-mal} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q-mal} \cong \mathrm{Mult_{p+q}}(\underbrace{V^*, ..., V^*}_{\mathrm{p-mal}}, \underbrace{V, ..., V}_{\mathrm{q-mal}}; \mathbb{R})$$

Abgabe: Mittwoch, 27. April 2011, 9 Uhr