Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
04.05.2011
Blatt 4

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $p, q \geq 1$, $1 \leq k \leq p$ und $1 \leq l \leq q$. Sei $\mathrm{tr}_\mathrm{k}^\mathrm{l} : \mathrm{T}^{(\mathrm{p},\mathrm{q})}(\mathrm{V}) \to \mathrm{T}^{(\mathrm{p}-1,\mathrm{q}-1)}(\mathrm{V})$ die Verjüngung von (p,q)-Tensoren im k. bzw. l. Faktor. Zeigen Sie: Hat $T \in T^{(p,q)}(V)$ die Koordinaten $\xi^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ und $\mathrm{tr}_\mathrm{k}^\mathrm{l}(\mathrm{T}) \in \mathrm{T}^{(\mathrm{p}-1,\mathrm{q}-1)}(\mathrm{V})$ die Koordinaten $\eta^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}$ bzgl. einer Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von V, so gilt:
$$\eta^{i_1,\dots,\widehat{i_k},\dots,i_p}_{j_1,\dots,\widehat{j_l},\dots,j_q} = \xi^{i_1,\dots,i_{k-1},m,i_{k+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{l-1},m,j_{l+1},\dots,j_q}.$$

2. Seien V und W Vektorräume und $p \in \mathbb{N}_0$. Sei weiter $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Definieren Sie in naheliegender Weise ein lineare Abbildung $f_* = \bigwedge^p f : \bigwedge^p V \to \bigwedge^p W$, so dass $\bigwedge^p$ einen Funktor von <u>Vect</u> auf sich selbst definiert.

3. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und $f : V \to V$ ein Endomorphismus.
   (a) Zeigen Sie, die folgende koordinatenfreie Beschreibung der Determinante von f (vgl. Aufgabe 2, Blatt3):
   $$\det(f) = \mathrm{spur}\left(\textstyle\bigwedge^n f\right).$$
   (b) Zeigen Sie, dass im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ folgende Identität gilt:
   $$\det(X\mathrm{id} + \mathrm{f}) = \textstyle\sum_{\mathrm{p}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{spur}\left(\bigwedge^\mathrm{p} \mathrm{f}\right) \mathrm{X}^{\mathrm{n}-\mathrm{p}}.$$

4. Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorraumbündel vom Rang $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{A} = (\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k)_{i \in I}$ ein Bündelatlas und $(\varphi_{ij} : U_i \cap \mathrm{U_j} \to \mathrm{GL_k}(\mathbb{R}))_{\mathrm{i,j} \in \mathrm{I}}$ die zugehörigen Übergangsfunktionen. Zeigen Sie:
   (a) Für alle $i \in I$ und $p \in U_i$ ist: $\varphi_{ii}(p) = \mathbb{1}$.
   (b) Für alle $i, j, k \in I$ mit $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ und alle $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt:
   $$\varphi_{ij}(p)\varphi_{jk}(p)\varphi_{ki}(p) = \mathbb{1}.$$

Abgabe: Mittwoch, 11. Mai 2011, 9 Uhr