Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
11.05.2011
Blatt 5

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und TM ihr Tangentialbündel, versehen mit der Topologie aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass diese Topologie hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis besitzt. (Hinweis: M hat stets eine abzählbaren Atlas)

2. Sei $\pi : L \to M$ eine Geradenbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie: L ist genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt $s : M \to L$ ohne Nullstellen gibt, d.h. $s(p) \neq 0_p$, für alle $p \in M$.

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M und $(\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))_{i,j\in I}$, $k \in \mathbb{N}_0$, glatte Funktionen, die (a) und (b) aus Aufgabe 3 von Blatt 4 erfüllen. Man setze $E := (\sum_{i\in I} U_i \times \mathbb{R}^k)/\sim$, wobei $(p, x) \in U_i \times \mathbb{R}^k$ und $(q, y) \in U_j \times \mathbb{R}^k$ äquivalent seien, genau wenn $p = q$ und $x = \varphi_{ij}(p)y$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\sum_{i\in I} U_i \times \mathbb{R}^k$ definiert.

   (b) Ist E mit der natürlichen Topologie (bestehend aus der offensichtlichen Kombination von Produkt-, Summen- und Quotiententopologie) versehen, so zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi : E \to M : [(p, x)] \mapsto p$ wohldefiniert und stetig ist und für jedes $i \in I$ die Abbildung $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k : [(p, x)] \mapsto (p, x)$ wohldefiniert und ein Homöomorphismus ist.

   (c) Versehen Sie nun E mit einer glatten Struktur, so dass π glatt wird und (φ_i) zu einem Bündelatlas für π, dessen Übergänge gerade die Abbildungen (φ_{ij}) sind.

4. Sei $\pi\colon E \mapsto M$ ein Vektorbündel und $\Gamma(E)$ der $\mathcal{E}(\mathcal{M})$-Modul der globalen Schnitte in E.

(a) Sei $p \in M$. Zeigen Sie, dass der Auswertungshomomorphismus

$$\mathrm{ev_p}\colon \Gamma(\mathrm{E}) \mapsto \mathrm{E_p},\ \mathrm{s} \mapsto \mathrm{s(p)}$$

surjektiv ist. (Hinweis: Benutzen Sie Abschneidefunktionen.)

(b) Zeigen Sie, dass für $\dim(M) \geq 1$ und $\mathrm{rg(E)} \geq 1$ gilt:

$$\dim \Gamma(E) = \infty.$$

(c) Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel TM von M genau dann trivial ist, wenn mit $n = \dim(M)$ und den glatten Vektorfeldern $\mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$ gilt:

$$\mathcal{X}(M) \cong \mathcal{E}(M)^n.$$

Abgabe: Mittwoch, 18. Mai 2011, 9 Uhr