Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
25.05.2011
Blatt 7

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei (M, o) eine orientierte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Zeigen Sie:
   (a) Ist $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte, so dass $D\varphi_p : TM_p \to T\mathbb{R}^n_{\varphi(p)} \cong \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist, so gibt es eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ von p, so dass $D\varphi_q$ für alle $q \in U'$ orientierungserhaltend ist.
   (b) Ist N eine weitere orientierte Mannigfaltigkeit, M zusammenhängend und $\Phi : M \to N$ eine Diffeomorphismus, so gilt: Ist $D\Phi_p : TM_p \to TN_{\Phi(p)}$ orientierungserhaltend, für ein $p \in M$, so ist $D\Phi_q$ orientierungserhaltend, für alle $q \in M$.
   (c) Ist M zusammenhängend, so gibt es genau eine andere Orientierung auf M, nämlich $-o = (-o_p)_{p \in M})$.

2. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{pot_k} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : \mathrm{z} \mapsto \mathrm{z^k}$ (wo $\mathbb{S}^1$ als Teilraum von $\mathbb{C}$ betrachtet wird). Zeigen Sie:
$$\deg(\mathrm{pot_k}) = \mathrm{k}.$$

3. (Brouwer) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ glatt mit $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

4. (a) Sei $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ der 1-dimensionale komplex-projektive Raum sowie $U_i = \{(z^0 : z^1) \in \mathbb{P}^1 : z^i \neq 0\}$ $(i = 0, 1)$ und $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}$ die Standardkarten von $\mathbb{P}^1$, also
$$\varphi_0(z^0 : z^1) = \frac{z^1}{z^0}, \varphi_1(z^0 : z^1) = \frac{z^0}{z^1}.$$
   Definieren Sie, was eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist (eine so genannte Riemannsche Fläche), berechnen Sie die Übergänge von $\mathcal{A} = (\varphi_0, \varphi_1)$ und zeigen Sie damit, dass $\mathbb{P}^1$ eine Riemannsche Fläche ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^1$ (als 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit) diffeomorph zu $\mathbb{S}^2$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{S}^2$ als $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $\infty = (0, 0, 1)$, (die Riemannsche Zahlenkugel) und schicken Sie $z \in \mathbb{C}$ auf $\varphi_1^{-1}(z)$ sowie ∞ auf (0:1).)
   (c) Sei nun $p \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}$. Definieren Sie $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ durch $f(z) = p(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $f(\infty) = \infty$ (wenn man wieder $\mathbb{S}^2$ als $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachtet). Zeigen Sie, dass f glatt ist (ja sogar holomorph bzgl. der komplexen Struktur von $\mathbb{P}^1$) und dass gilt:
$$\deg(f) = k.$$

Abgabe: Mittwoch, 1. Juni 2011, 9 Uhr