Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
01.06.2011
Blatt 8

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorraumbündel vom Rang k und $\varphi_{12} : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ der Übergang zwischen zwei Bündelkarten $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ $(\alpha = 1, 2)$ von π. Zeigen Sie, dass für den Übergang $\widetilde{\varphi}_{12} : U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ zwischen den induzierten Bündelkarten $\widetilde{\varphi}_\alpha : \widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ $(\alpha = 1, 2)$ des dualen Bündels $\widetilde{\pi} : E^* \to M$ gilt:
$$\widetilde{\varphi}_{12}(p) = \varphi^t_{12}(p)^{-1}.$$

2. Seien $\pi_1 : E_1 \to M$ und $\pi_2 : E_2 \to M$ Vektorraumbündel vom Rang k_1 bzw. k_2 und $U, V \subseteq M$ offen, so dass es Bündelkarten $\varphi_j : \pi_j^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{k_j}$ und $\psi_j : \pi_j^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^{k_j}$ von π_j gibt $(j = 1, 2)$. Konstruieren Sie Bündelkarten $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{k_1 k_2}$ und $\psi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^{k_1 k_2}$ des Tensorbündels $\pi : E_1 \otimes E_2 \to M$, so dass für den Übergang $\tau : U \cap V \to \mathrm{GL}_{k_1 k_2}(\mathbb{R})$ gilt (wo τ_1 bzw. τ_2 den Übergang von π_1 bzw. π_2 bezeichnet, $1 \le i_1, j_1 \le k_1, 1 \le i_2, j_2 \le k_2$):
$$\tau(p)^{(i_1,i_2)}_{(j_1,j_2)} = \tau_1(p)^{i_1}_{j_1} \tau_2(p)^{i_2}_{j_2}.$$

3. Sei $\pi : E \to M$ ein Vektorraumbündel vom Rang k und $0 \le p \le k$. Zeigen Sie: Ist $\tau : U \cap V \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ ein Übergang eines Bündelatlas' von π, so gilt für den induzierten Atlas auf dem Bündel $\bigwedge^p E \to M$, dass er den folgenden Übergang $\sigma : U \cap V \to \mathrm{GL}_{\binom{k}{p}}(\mathbb{R})$ hat $(I = \{1 \le i_1 < ... < i_p \le k\}, J = \{1 \le j_1 < ... < j_p \le k\})$:
$$\sigma(p)^I_J = \det(\tau(p)^I_J).$$

4. Sei $\pi : L \to M$ ein Geradenbündel über M.
   (a) Zeigen Sie, dass das Tensorbündel $L^* \otimes L$ trivial ist. (Hinweis: Zeigen Sie z.B., dass die Abbildung $\mathrm{spur} : \mathrm{L}^* \otimes \mathrm{L} \to \underline{\mathbb{R}}$ ein Bündelisomorphismus ist oder dass $L^* \otimes L$ einen nullstellenfreien Schnitt besitzt.)
   (b) Zeigen Sie, dass auf den Isomorphieklassen von Geradenbündeln über M durch $[L_1] \cdot [L_2] := [L_1 \otimes L_2]$ eine (abelsche) Gruppenstruktur erklärt ist.

Abgabe: Mittwoch, 8. Juni 2011, 9 Uhr